1282-19
2
K-1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar, H. Reichardt,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 218

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.
Berlin 1965

Archiv-Nr. 18 03 65
Satz und Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin 30
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 218

Seite

Al-Bassam, M. A., Some existence theorems on differential equations of generalized order 70

Arterburn, D. R., Weak perfect compactness and generalized adjoints 121

Bernstein, Leon und Hasse, Helmut, Einheitenberechnung mittels des Jacobi-Perronschen Algorithmus 51

Birch, B. J. and Swinnerton-Dyer, H. P. F., Notes on elliptic curves. II 79

Davenport, H. and Schinzel, A., Corrigendum to "Two problems concerning polynomials" (this Journal vol. 214/15, p. 386—391) 220

Gilbert, R. P. and Howard, H. C., On solutions of the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation generated by integral operators 109

Hasse, Helmut, siehe Bernstein, Leon

Hersch, Joseph, Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme 143

Higman, D. G. and McLaughlin, J. E., Rank 3 subgroups of finite symplectic and unitary groups 174

Hoechsmann, Klaus, Über nicht-kommutative abelsche Algebren 1

Howard, H. C., siehe Gilbert, R. P.

Johnson, B. E., An Addition Theorem for the Associated Legendre Functions 17

Kneser, Martin, Starke Approximation in algebraischen Gruppen. I 190

Kustaanheimo, P. and Stiefel, E., Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization 204

McLaughlin, J. E., siehe Higmann, D. G.

Miller, John Boris, Möbius Transforms of Reynolds Operators 6

Nessel, R. J., Über die Darstellung holomorpher Funktionen durch Weierstraß- und Weierstraß-Stieltjes-Integrale 31

Pommerenke, Christian, Über die Subordination analytischer Funktionen . . . 159

Pumplün, Dieter, Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper . . 23

Schinzel, A., siehe Davenport, H.

Stiefel, E., siehe Kustaanheimo, P.

Swinnerton, H. P. F., siehe Birch, B. J.

Warlimont, Richard, Fatou-Rieszsche Sätze in der Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen 129

Ausgabedatum des Bandes 218:

1. Juni 1965

cut pgs

Math

Journal für die reine und angewandte Mathematik

DARTMOUTH COLLEGE
AUG 14 1965
LIBRARY

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker, L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt, F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar, H. Reichardt, P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 218

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1965

Einsendung von Druckmanuskripten erbeten an den Herausgeber:

Prof. Dr. H. Hasse, 207 Ahrensburg, Hagener Allee 35

Die Schriftleitung bittet, die Manuskripte in leserlicher Schrift, möglichst mit der Schreibmaschine, zu schreiben. Formeln sollten mit der Hand eingetragen sein. Es empfiehlt sich, den Manuskripten Anweisungen für den Setzer beizulegen, insbesondere die vorkommenden deutschen, griechischen, Antiqua- und sonstige besondere Typen durch farbige Unterstreichungen zu kennzeichnen, ebenso kursiven, gesperrten oder fetten Satz hervorzuheben. Für etwaige Figuren werden reproduktionsfähige Reinzeichnungen mit Tusche auf Pergamentpapier erbeten.

Die Herren Autoren erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos, weitere gegen Berechnung.

Einzelheiten über den Korrekturgang sind aus den Laufzetteln zu ersehen, die den Korrekturs endungen beigefügt werden.

über
G-Al
diese
G-Al
urspr
beha
Alge
Grup
derje

dem

A_0
werd
zusa
dritt

Mod
in *M*
mit

Koh
symm
isom

und
häng

Über nicht-kommutative abelsche Algebren

Von *Klaus Hoechsmann*[1]), z. Z. Hamburg

G sei eine endliche Gruppe, k ein Körper. Wir betrachten separable Algebren A über k, die gleichzeitig als (linke) G-Moduln erklärt sind. Ein solches Gebilde heißt *G-Algebra*, wenn sich G dabei als Gruppe von Algebrenautomorphismen darstellt und diese Darstellung zur regulären äquivalent ist. In dieser Form findet sich der Begriff der G-Algebra bei Wolf [3]; mit der zusätzlichen Forderung, daß A kommutativ sei, war er ursprünglich von Teichmüller [2] eingeführt und danach von Hasse [1][2]) eingehend behandelt worden. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit *abelschen* Algebren, d. h., G-Algebren mit abelschem G. Für festes G bilden diese nämlich eine Gruppe $\mathcal{A}(k, G)$. Dabei ist das Produkt zweier G-Algebren A und B die Algebra aller derjenigen Elemente von $A \underset{k}{\otimes} B$, bei denen es gleichgültig ist, ob G auf dem ersten oder dem zweiten Faktor operiert. Die kommutativen G-Algebren bilden eine Untergruppe $\mathcal{A}_0(k, G)$. Hier soll nun die Faktorgruppe $\bar{\mathcal{A}}(k, G) = \mathcal{A}(k, G)/\mathcal{A}_0(k, G)$ untersucht werden. Im ersten Abschnitt sind ein paar einfache Tatsachen über abelsche Gruppen zusammengestellt, im zweiten wird die Struktur abelscher Algebren betrachtet, und im dritten gelangen wir zu den gewünschten Aussagen über $\bar{\mathcal{A}}(k, G)$.

1. Die endliche, abelsche Gruppe G sei additiv geschrieben, und M sei irgendein Modul. Eine isotrope Bilinearform π auf G (d. h. $\pi(\sigma, \sigma) = 0$ für alle $\sigma \in G$) mit Werten in M heiße hier einfach *Paarung*. Die Paarungen von G in M bilden eine Gruppe $\Pi(G, M)$ mit der Addition

$$(\pi_1 + \pi_2)(\sigma, \tau) = \pi_1(\sigma, \tau) + \pi_2(\sigma, \tau).$$

Lemma 1. *M sei als trivialer G-Modul aufgefaßt. $H^2(G, M)$ bedeute die übliche zweite Kohomologiegruppe und $H_0^2(G, M)$ die Untergruppe derjenigen Klassen, deren Elemente symmetrisch sind ($c_{\sigma,\tau} = c_{\tau,\sigma}$). Dann ist $H^2(G, M)/H_0^2(G, M)$ zu $\Pi(G, M)$ kanonisch isomorph.*

Beweis. Zu jedem Kozyklus c bilde man $\tilde{c}$ durch $\tilde{c}_{\sigma,\tau} = c_{\tau,\sigma}$. Weil G abelsch ist und auf M trivial operiert, ist $\tilde{c}$ wieder ein Kozyklus. Setze $\bar{c} = c - \tilde{c}$. Die Klasse $[\bar{c}]$ hängt nur von der Klasse $\gamma = [c]$ ab und kann mit $\bar{\gamma}$ bezeichnet werden. Der genaue

---

[1]) NATO Science Fellow.

[2]) Siehe auch die in [1] und [3] aufgeführten Arbeiten von Hasse.

Kern des Homomorphismus $\gamma \to \bar{\gamma}$ ist $H_0^2(G, M)$. Für einen Kozyklus c addiere man die Relationen:

$$c_{\sigma,\tau} - c_{\varrho\sigma,\tau} + c_{\varrho,\sigma\tau} - c_{\varrho,\sigma} = 0,$$
$$c_{\varrho,\sigma} - c_{\tau\varrho,\sigma} + c_{\tau,\varrho\sigma} - c_{\tau,\varrho} = 0,$$
$$-c_{\tau,\sigma} + c_{\varrho\tau,\sigma} - c_{\varrho,\tau\sigma} + c_{\varrho,\tau} = 0.$$

Es ergibt sich: $\bar{c}_{\tau,\varrho\sigma} = \bar{c}_{\tau,\varrho} + \bar{c}_{\tau,\sigma}$. Da $\bar{c}_{\sigma,\sigma} = 0$ trivialerweise gilt, ist $\bar{c} \in \Pi(G, M)$.

Um zu zeigen, daß sich alle Paarungen so erhalten lassen, zerlegen wir G in eine direkte Summe von Zyklen: $G = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_r$. Eine Paarung π sei gegeben. Für $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$, $\tau = \tau_1 + \cdots + \tau_r$ $(\sigma_i, \tau_i \in Z_i)$ setzen wir $c_{\sigma,\tau} = \sum_{i>j} \pi(\sigma_i, \tau_j)$. Man verifiziert sofort, daß c ein Kozyklus ist. Nun ist $\pi(\sigma, \tau) = \sum_{i \neq j} \pi(\sigma_i, \tau_j) = c_{\sigma,\tau} - c_{\tau,\sigma}$.

Ist $M = \boldsymbol{Z}_l$ der Modul der ganzen Zahlen modulo l, wobei l der Exponent von G ist, so schreiben wir einfach $\Pi(G, \boldsymbol{Z}_l) = \Pi(G)$. Jedes $\pi \in \Pi(G)$ definiert einen Homomorphismus von G in die Charaktergruppe $\hat{G}$. Ein Homomorphismus $\theta: G \to \hat{G}$ heiße *isotrop*, wenn $(\theta(\sigma))(\sigma) = 0$ ist für alle σ.

Das folgende Lemma ist sofort klar.

Lemma 2. *$\Pi(G)$ ist isomorph zur Gruppe der isotropen Homomorphismen von G in $\hat{G}$. Diese sind umkehrbar eindeutig den nicht-entarteten Paarungen auf Untergruppen von G zugeordnet.*

Schließlich soll noch gezeigt werden, daß die Existenz einer nicht-entarteten Paarung $\pi \in \Pi(G)$ die Gruppe G zu einer ganz bestimmten Struktur zwingt. Ähnlich wie bei Vektorräumen gilt nämlich auch hier:

Lemma 3. *$\pi \in \Pi(G)$ sei nicht entartet. Dann ist G direkte, π-orthogonale Summe von bizyklischen Gruppen, $G = B_1 \perp B_2 \perp \cdots \perp B_r$, auf denen π auch nicht entartet ist.*

Beweis. Induktion. G kann offensichtlich nicht zyklisch sein. Es sei $G = Z \oplus W$, Z ein Zyklus der maximalen Länge l. Wir setzen $B = Z + W^\perp$, wobei $W^\perp$ das Orthokomplement (bezüglich π) von W bedeute. Man sieht sofort: $W^\perp \cong \hat{Z}$, $W^\perp \cap Z = 0$. Daher ist B bizyklisch, und π auf B ist nicht entartet. Es folgt: $B + B^\perp = B \oplus B^\perp$. B hat Erzeugende x, y mit $\pi(x, y) = 1$. Für $\sigma \in G$ ist $\pi(\sigma, y)\, x - \pi(\sigma, x)\, y \in B$ und $\sigma - \pi(\sigma, y)\, x + \pi(\sigma, x)\, y \in B^\perp$, also $G = B \oplus B^\perp$. Da π auf $B^\perp$ nicht entartet sein kann, ist nach Induktionsvoraussetzung $B^\perp = B_2 \perp \cdots \perp B_r$. Setze $B = B_1$.

2. G wird jetzt wieder multiplikativ geschrieben. $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ sei eine G-Algebra, A_i einfach. Ist G_i die Untergruppe aller $\sigma \in G$ mit $\sigma A_i = A_i$, dann wird das Paar (A_i, G_i) eine *Kernalgebra* von A genannt. Ganz allgemein gilt $A = \tau_1 A_1 \oplus \cdots \oplus \tau_r A_1$, wenn $\tau_1, \ldots, \tau_r$ ein Vertretersystem modulo G_1 ist; aus der Theorie der induzierten Darstellungen folgt nun, daß A durch eine Kernalgebra (A_1, G_1) bis auf Isomorphie bestimmt ist. A heißt *kerngaloissch*, wenn A_1 eine G_1-Algebra ist. (Dann ist auch jeweils A_i eine G_i-Algebra.)

Bekanntlich [1] haben alle kommutativen G-Algebren diese Eigenschaft. Wir zeigen nun

Lemma 4. *G sei abelsch. Dann ist jede G-Algebra kerngaloissch.*

Beweis. Nach dem Krull-Schmidtschen Satz über die eindeutige Zerlegbarkeit gewisser Moduln in unzerlegbare bilden die Klassen äquivalenter Darstellungen von G_1 über k eine additive Halbgruppe. Wir betrachten jetzt die gegebene G-Algebra A nur

als G_1-Modul. Dann ist mit obiger Bezeichnung $\tau_1 A_1 \cong \tau_i A_1$ für alle i, da G abelsch ist, also $A \cong \dot{r} A_1 = A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_1$ (r-mal). Für die Gruppenalgebra gilt aber auch $k[G] \cong \dot{r} k[G_1]$. Daher ist $A_1 \cong k[G_1]$ als G_1-Modul.

Nach diesem Lemma dürfen wir uns auf die Untersuchung einfacher G-Algebren beschränken. Es sei fortan G eine abelsche Gruppe.

A sei eine einfache G-Algebra mit dem Zentrum K. Dann ist K/k normal mit der Gruppe G/H, wobei H die Fixgruppe von K in G ist[3]).

Satz 1. *A ist eine H-Algebra über K. Der Exponent l von H ist prim zur Charakteristik von k, und K enthält die l-ten Einheitswurzeln. Auf H ist eine nicht-entartete Paarung $\pi \in \Pi(H)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zuerst zeigen wir: Der Fixbereich von H in A ist K. Dazu betrachten wir die G-Algebra $A' = A \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ über dem algebraischen Abschluß $\bar{k}$ von k. Es ist $A' = A'_1 \oplus \cdots \oplus A'_s$ mit $A'_i = A' e_i$, wobei $e_1, \ldots, e_s$ die minimalen Idempotente von $K \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ bedeuten. Wegen der Normalität von K/k gibt es Vertreter $\tau_1, \ldots, \tau_s$ von G/H derart, daß $\tau_i e_1 = e_i$ ist. Insbesondere ist H genau die lokale Gruppe von A'_1. Daher ist A'_1 nach Lemma 4 eine H-Algebra; der Fixbereich von H in A'_1 ist $\bar{k} e_1$, der von H in A' also $K \underset{k}{\otimes} \bar{k}$.

Nun seien $a_\sigma \in A\,(\sigma \in H)$ so gewählt, daß $a_\sigma x a_\sigma^{-1} = \sigma x$ ist für alle $x \in A$. Die a_σ sind bis auf Faktoren aus K bestimmt. Die Paarung $\pi(\sigma, \tau) = a_\sigma a_\tau a_\sigma^{-1} a_\tau^{-1}$ (man beachte: $a_\sigma a_\tau a_{\sigma\tau}^{-1} \in K$) liegt daher eindeutig fest. $\pi(\sigma, \tau) = 1$ gilt genau dann, wenn $\sigma a_\tau = a_\tau$ ist; also ist nach dem Vorangehenden π nicht entartet. Daraus folgt schon, daß K eine zyklische Gruppe der Ordnung l enthält, wie behauptet. Schließlich sei $\theta : H \to \hat{H}$ der nach Lemma 2 durch π definierte Isomorphismus. Setzt man $a_\chi = a_{\theta(\chi)}^{-1}$ für jedes $\chi \in \hat{H}$, so bilden die a_χ eine Faktorbasis im Sinne von [1] für A über K. Da $K[H]$ halbeinfach ist, folgt: $A \cong K[H]$ als H-Modul.

Als Gegenstück zu Satz 1 brauchen wir noch die Umkehrung einer Teilaussage. A sei eine einfache Algebra, auf der G als Automorphismengruppe operiert; es wird *nicht* vorausgesetzt, daß A G-Algebra ist. K und H bezeichnen wieder das Zentrum von A und dessen Fixgruppe in G. Dann gilt

Lemma 5. *K/k sei normal mit der Gruppe G/H, und A sei H-Algebra über K. Dann ist A eine G-Algebra über k.*

Beweis. Wir bilden $A' = A'_1 \oplus \cdots \oplus A'_s$ wie im Beweis zu Satz 1. Wie vorhin folgt, daß $\tau_i e_1 = e_i$ ist für ein Vertretersystem $\tau_1, \ldots, \tau_s$ von G/H. Es sei $b \in A$ ein Element, welches eine Normalbasis von A/K liefert, d. h. $\{\sigma b \mid \sigma \in H\}$ sei über K linear unabhängig. Dann ist $\{\sigma b e_1 \mid \sigma \in H\}$ über $\bar{k} e_1$ und $\{\tau b e_1 \mid \tau \in G\} = \bigcup_{i=1}^{s} \tau_i \{\sigma b e_1 \mid \sigma \in H\}$ über $\bar{k}$ linear unabhängig. Also hat A' eine Normalbasis und ist deshalb G-Algebra. Nach einem Satz von Noether-Deuring bleiben aber inäquivalente Darstellungen von G auch bei Grundkörpererweiterung inäquivalent. Es muß daher schon A eine G-Algebra sein.

3. Zu jeder Erweiterung des Grundkörpers K/k erhält man einen natürlichen Homomorphismus $\bar{\mathcal{A}}(k, G) \to \bar{\mathcal{A}}(K, G)$. Dieser ist injektiv; denn eine Algebra wird ja nicht dadurch kommutativ, daß man ihren Grundkörper erweitert. Für hinreichend

[3]) G/H läßt sich in die Automorphismengruppe von K/k einbetten. Zu zeigen ist: $(G:H) \geqq (K:k)$. Sei $A \otimes \bar{k} = A'_1 \oplus \cdots \oplus A'_s$ wie im Beweis zu Satz 1. G permutiert die A'_i transitiv, also auch die s einfachen Komponenten des Zentrums $K \otimes \bar{k}$ von $A \otimes \bar{k}$. Daher ist $(G:H) \geqq s$.

großes K ist aber $\bar{\mathcal{A}}(K, G)$ isomorph zu der endlichen Gruppe $\Pi(\hat{G}, K)$; das müssen wir jetzt zeigen. Die einzige, allerdings unwesentliche Schwierigkeit liegt darin, daß $K[G]$ nicht immer halbeinfach ist.

l sei der Exponent von G, und K enthalte die l-ten Einheitswurzeln. Ferner bezeichne $\bar{K}$ den algebraischen Abschluß von K und G_0 die Gruppe derjenigen Elemente von G, deren Ordnung prim zur Charakteristik von K ist. Insbesondere ist $\bar{\mathcal{A}}(\bar{K}, G) = \mathcal{A}(\bar{K}, G)$ und $\Pi(\hat{G}, K) = \Pi(\hat{G}_0)$. Für jede Untergruppe $H < G$ gibt es eine natürliche Einbettung $\mathcal{A}(k, H) < \mathcal{A}(k, G)$: Die Kernalgebra einer H-Algebra werde einfach zu einer G-Algebra erweitert. Dies ist die Bedeutung der vertikalen Pfeile in folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{A}}(K, G) & \to & \mathcal{A}(\bar{K}, G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{\mathcal{A}}(K, G_0) & \to & \mathcal{A}(\bar{K}, G_0). \end{array}$$

Alle vier Abbildungen sind injektiv. Es gelten nun:

Lemma 6. *Die Abbildung $\mathcal{A}(\bar{K}, G_0) \to \mathcal{A}(\bar{K}, G)$ ist bijektiv.*

Lemma 7. *Enthält der Körper L die l-ten Einheitswurzeln, so ist $\bar{\mathcal{A}}(L, G_0) \cong \Pi(\hat{G}_0)$.*

Aus diesen Lemmata ergibt sich die Bijektivität aller Homomorphismen des Diagramms. Daher folgt:

Satz 2. $\bar{\mathcal{A}}(K, G) \cong \Pi(\hat{G}_0)$.

(Die diesem Isomorphismus zugrunde liegende Zuordnung G-Algebra $\to$ Paarung kann aus Satz 1 unter Berücksichtigung von Lemma 2 abgelesen werden.)

Zum Beweis von Lemma 6 sei (A, H) Kernalgebra einer G-Algebra über $\bar{K}$. Da $\bar{K}$ keine eigentlichen abelschen Erweiterungen zuläßt, ist A zentral einfach. Nach Satz 1 ist daher $H < G_0$. Lemma 7 folgt sofort aus Lemma 1; denn nach Hasse [1] gilt

$$\mathcal{A}(L, G_0) \cong H^2(\hat{G}_0, L)\ ^{4)}.$$

Nach dem Bisherigen ist $\bar{\mathcal{A}}(k, G)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\Pi(\hat{G}_0)$. Als untere Abschätzung ihrer Größe kennzeichnen wir zum Schluß noch die Primteiler der Ordnung von $\bar{\mathcal{A}}(k, G)$. Für eine Primzahl p bedeute k_p den kleinsten Oberkörper von k, dessen multiplikative Gruppe einen p-Zyklus enthält. Wir setzen

$$\nu(k, p) = \begin{cases} (k_p : k), & p \neq \text{Charakteristik}, \\ \infty, & p = \text{Charakteristik}. \end{cases}$$

Satz 3. *p ist genau dann Teiler der Gruppenordnung $(\bar{\mathcal{A}}(k, G) : 1)$, wenn es folgenden Bedingungen genügt:*

1) *Die p-Sylowgruppe von G ist nicht zyklisch.*

2) *G enthält ein Element der Ordnung $\nu(k, p)$.*

Beweis. G enthalte eine bizyklische Gruppe $B = S \times T$ mit den Erzeugenden σ und τ $(\sigma^p = \tau^p = 1)$ und einen Zyklus R der Ordnung $\nu(k, p)$ mit der Erzeugenden ϱ. Wir betrachten die verallgemeinerte Quaternionenalgebra A über k_p, die von Elementen u, v mit den Relationen: $u^p = v^p = 1$, $vu = \zeta u v$ erzeugt wird, wobei $\zeta \in k_p$ eine primitive p-te Einheitswurzel ist (wegen $\nu(k, p) < \infty$ ist $p \neq$ Charakteristik von k). A ist

---

[4]) Da $L[G_0]$ halbeinfach ist, hat jede G_0-Algebra A eine L-Basis $\{a_\chi \mid \chi \in \hat{G}_0\}$ mit $\sigma a_\chi = \chi(\sigma)\, a_\chi$ $(\sigma \in G_0)$ und $a_\chi a_\psi = c_{\chi,\psi} a_{\chi\psi}$ $(c_{\chi,\psi} \in L)$. A ist durch den Kozyklus c bis auf Isomorphie bestimmt.

zentral einfach über k_p und wird durch die Festsetzungen $u^{\sigma-1} = v^{\tau-1} = \zeta$, $u^{\tau-1} = v^{\sigma-1} = 1$ zur B-Algebra. Man identifiziere jetzt R mit der Gruppe von k_p/k und fasse A als Algebra über k auf. Der Automorphismus ϱ von k_p/k besitzt eine natürliche Fortsetzung auf die zerfallende S-Algebra $k_p[u] \subset A$; ferner setze man $\varrho v = v$. So wird $G_1 = B \times R$ eine Automorphismengruppe der Algebra A/k; nach Lemma 5 ist diese eine G_1-Algebra. Nun ist aber das Produkt $BR \subset G$ direkt, weil $\nu(k, p) < p$ ist, und somit $G_1 \subset G$. Der Kernalgebra von $A \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ ist die durch $\pi(\sigma, \tau) = \zeta^{-1}$ bestimmte Paarung auf B zugeordnet; daher hat auch A modulo $\mathcal{A}_0(k, G)$ die Ordnung p.

Umgekehrt sei A eine nicht-kommutative G-Algebra, deren p-te Potenz abelsch ist. Weil es genügt, die Bedingungen (1) und (2) für Untergruppen von G zu beweisen, kann man gleich annehmen, daß A einfach ist. K sei wieder das Zentrum von A, H seine Fixgruppe. Nach Satz 1 ist A eine H-Algebra über K. Ferner wissen wir, daß die Ordnung der Klasse $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}(k, G)$ gleich der Ordnung der Klasse $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}(K, H)$ ist. Diese ist aber durch eine nicht-entartete Paarung auf H bestimmt. Deshalb muß H eine nicht-zyklische p-Gruppe sein. Außerdem enthält K den Körper k_p, G/H also ein Element der Ordnung $\nu(k, p)$.

Literatur

[1] *H. Hasse*, Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galoisgruppe, Hamb. Abh. **16** (1949), 29—40.

[2] *O. Teichmüller*, Verschränkte Produkte mit Normalringen, Deutsche Math. **1** (1936), 92—102.

[3] *P. Wolf*, Algebraische Theorie der galoisschen Algebren, Math. Forschungsberichte III, Berlin 1956.

Eingegangen 21. Januar 1964

Möbius Transforms of Reynolds Operators

By *John Boris Miller* at Canberra (Australia)

Abstract. Certain Möbius (i. e. bilinear) transformations map Reynolds operators to Reynolds operators; to wit, those under which the systems of coaxal circles through 0 and 1 is invariant. Conversely, in appropriate circumstances, the only holomorphic functions which map Reynolds operators to Reynolds operators are these Möbius functions and possibly also certain compositions of Möbius and power functions. This is because of the way in which the point spectrum of a Reynolds operator is disposed on the circles of the above coaxal system.

1. Notation. Regular Reynolds operators and derivations

We use the following notation:

$\mathfrak{A}$ is a Banach algebra, in general non-commutative, over the complex field.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ is the Banach algebra of bounded linear transformations mapping $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{A}$, with identity E.

$\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ is the class of closed linear transformations with domain and range in $\mathfrak{A}$, and having non-empty resolvent set.

For $K \in \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, the (extended) resolvent set, spectrum and point spectrum of K are respectively the following subsets of the extended complex plane:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(K) &= \{\lambda\colon (\lambda E - K)^{-1} \text{ exists as an element of } \mathfrak{B}(\mathfrak{A})\}, \\ \operatorname{Sp}(K) &= \{\lambda\colon \lambda E - K \text{ has no inverse in } \mathfrak{B}(\mathfrak{A})\} \\ \operatorname{PtSp}(K) &= \{\lambda\colon \lambda E - K \text{ is not one-to-one}\}. \end{aligned}$$

The domain of K is written $\mathfrak{D}(K)$. We sometimes write $R(\lambda, K)$ for $(\lambda E - K)^{-1}$; it is an element of $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$.

By a *Reynolds operator* we shall mean a transformation T in $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ having the property

$$(1.1) \qquad (E + T)(Tx \cdot Ty) = T(Tx \cdot y + x \cdot Ty) \qquad (\text{all } x, y \in \mathfrak{D}(T))$$

It is assumed that $\mathfrak{D}(T)$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}$, and contains the range of T, which is necessarily also a subalgebra. Linear operators satisfying (1. 1) on particular (not necessarily normed) algebras, and subject to additional restrictions, have been investigated in some detail; references to the literature are given in [1], [2], [4] and [5].

By a *derivation* we shall mean a transformation D in $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ with the property

$$(1.2) \qquad D(xy) = Dx \cdot y + x \cdot Dy \quad (\text{all } x, y \in \mathfrak{D}(D)).$$

It is assumed that $\mathfrak{D}(D)$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}$. An example of a derivation is the commutator C_a of an element $a \in \mathfrak{A}$, defined by $C_a x = ax - xa$; $C_a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$.

We are concerned in this paper with aspects of the problem of generating Reynolds operators. One source of Reynolds operators is from resolvents of derivations; we have

Theorem 1. *If D is a derivation with domain $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{A}$, and $\lambda \in Res\,(D)$, then*

$$T = \lambda(\lambda E - D)^{-1} = \lambda R(\lambda, D) \tag{1.3}$$

is an inversible bounded Reynolds operator on $\mathfrak{A}$ with range $\mathfrak{D}$.

Conversely, if T is an inversible bounded Reynolds operator on $\mathfrak{A}$ with range $\mathfrak{D}$, then for any complex λ,

$$D = \lambda(E - T^{-1}) \tag{1.4}$$

is a derivation with domain $\mathfrak{D}$, and $\lambda \in \mathrm{Res}\,(D)$, so that (1.3) holds.

Here by 'inversible' we mean, of course, one-to-one. The formal algebraic connection between inversible Reynolds operators and derivations can be considered well-known; see for example [4]. The theorem states this connection in a form appropriate to the present circumstances. It will suffice to prove the second part; the proof of the first is similar. Suppose therefore that T has the stated properties and that D is defined by (1.4); its domain is clearly $\mathfrak{D}$. If $a, b \in \mathfrak{D}$, write $T^{-1}a = x$, $T^{-1}b = y$. We have

$$\begin{aligned} Da \cdot b + a \cdot Db &= \lambda(2ab - T^{-1}a \cdot b - a \cdot T^{-1}b) \\ &= \lambda\{2\,Tx \cdot Ty - (x \cdot Ty + Tx \cdot y)\} \\ &= \lambda\{2\,Tx \cdot Ty - T^{-1}(E + T)\,(Tx \cdot Ty)\} \\ \text{by (1.1)} \quad &= \lambda(E - T^{-1})\,(ab) = D(ab). \end{aligned}$$

This theorem characterizes the bounded Reynolds operators whose resolvent set contains 0; in later paragraphs we are concerned with Reynolds operators for which 0 lies in the spectrum.

Suppose that D is a given derivation, and write (1.3) as $T_\lambda = \lambda(\lambda E - D)^{-1}$. It is easily verified that the Reynolds operators determined by two numbers λ and μ in $\mathrm{Res}\,(D)$ are related by

$$T_\lambda = T_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}\,(E - T_\mu) + T_\mu\right)^{-1}.$$

This is a particular case of the following theorem.

Theorem 2. *If T is a Reynolds operator and $\varrho \in \mathrm{Res}\,(T)$, then the operator*

$$U_\varrho = (\varrho - 1)\,(\varrho E - T)^{-1}\,T = \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}\,(E - T) + T\right)^{-1} T \tag{1.5}$$

is also a Reynolds operator, with the same domain as T, and is bounded; also

$$(\varrho E - T)^{-1}\,T \leqq T\,(\varrho E - T)^{-1},$$

the latter operator belonging to $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$.

Proof. The last statement is obvious, since $\mathfrak{D}(T)$ contains the range of $R(\varrho, T)$ for any $T \in \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$. Let $a, b \in \mathfrak{D}(U_\varrho) = \mathfrak{D}(T)$, and write

$$(\varrho E - T)^{-1}a = x, \quad (\varrho E - T)^{-1}b = y.$$

Then $x, y \in \mathfrak{D}(T)$, and

$$U_\varrho a = (\varrho - 1)\,(\varrho E - T)^{-1}\,Ta = (\varrho - 1)\,T\,(\varrho E - T)^{-1}a = (\varrho - 1)\,Tx,$$

and similarly $U_\varrho b = (\varrho - 1)\,Ty$. We have

$$\begin{aligned} &U_\varrho a \cdot b + a \cdot U_\varrho b - U_\varrho a \cdot U_\varrho b \\ &\quad = (\varrho - 1)\,\{Tx \cdot (\varrho y - Ty) + (\varrho x - Tx) \cdot Ty - (\varrho - 1)\,Tx \cdot Ty\} \\ &\quad = (\varrho - 1)\,\{\varrho(Tx \cdot y + x \cdot Ty - Tx \cdot Ty) - Tx \cdot Ty\}. \end{aligned}$$

This belongs to $\mathfrak{D}(T)$, so that

$$U_\varrho(U_\varrho a \cdot b + a \cdot U_\varrho b - U_\varrho a \cdot U_\varrho b)$$
$$= (\varrho - 1)^2(\varrho E - T)^{-1}\{\varrho Tx \cdot Ty - T(Tx \cdot Ty)\}$$

by (1.1)

$$= (\varrho - 1)^2(Tx \cdot Ty) = U_\varrho a \cdot U_\varrho b.$$

Thus U_ϱ is a Reynolds operator; and it is bounded, for

$$U_\varrho = -(\varrho - 1)\, E + \varrho(\varrho - 1)\,(\varrho E - T)^{-1}.$$

Later we shall need

Lemma 1. *If* $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, *then* $\| T - U_\varrho \| \to 0$ *as* $|\varrho| \to \infty$.

Proof.
$$T - U_\varrho = (\varrho E - T - (\varrho - 1)\, E)\,(\varrho E - T)^{-1}\, T$$
$$= (E - T)\,(\varrho E - T)^{-1}\, T.$$

The result follows.

Let $\varrho = \omega/(\omega - 1)$ be a complex number. Theorem 2 states that the Möbius function M_ϱ given by

$$M_\varrho(z) = (\varrho - 1)\, z(\varrho - z)^{-1} = z(z + \omega(1 - z))^{-1}, \tag{1.6}$$

which is holomorphic except for a simple pole at the point $z = \varrho$, has the property of mapping every Reynolds operator whose spectrum does not contain ϱ to a Reynolds operator. Here we shall define $M_\varrho(T)$ to mean $(\varrho - 1)\, T(\varrho E - T)^{-1}$, so that $M_\varrho(T) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. The rest of this paper is concerned with the question: What functions besides M_ϱ map Reynolds operators to Reynolds operators? We give a partial answer in Theorem 3, below.

To give a meaning to $f(T)$ when f is a more general function and $T \in \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, we use the operational calculus due to A. E. Taylor[1]). Let Δ be an open subset of the extended complex plane, and f a function locally holomorphic on Δ. If T belongs to $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ and $\mathrm{Sp}\,(T) \subset \Delta$, we define $f(T)$ by

$$f(T) = \delta f(\infty)\, E + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, R(z, T)\, dz; \tag{1.7}$$

here Γ is an appropriate set of closed rectifiable oriented Jordan curves lying in Δ and enclosing $\mathrm{Sp}\,(T)$; and δ is 1 or 0 according as Γ contains ∞ in its interior or not. So defined, $f(T) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. If $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, then we can assume the case $\delta = 0$.

The spectral mapping theorem for this operational calculus says that, in the above circumstances[2]),

$$\mathrm{Sp}\,(f(T)) = f(\mathrm{Sp}\,(T)), \tag{1.8}$$

and, for the fine structure of the spectrum,

$$f(\mathrm{PtSp}\,(T) \setminus \{\infty\}) \subseteq \mathrm{PtSp}\,(f(T)) \subseteq f(\mathrm{PtSp}\,(T)) \cup \{f(\infty)\}. \tag{1.9}$$

(For the latter inclusion it is assumed that f is not constant on any component of Δ containing points of $\mathrm{Sp}\,(T)$.) For $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, (1.9) is replaced by

$$\mathrm{PtSp}\,(f(T)) = f(\mathrm{PtSp}\,(T)). \tag{1.10}$$

---

[1]) See [3], Section 5.11, or [6], § 5.6.

[2]) [3], Theorems 5.12.1 and 5.12.2.

2. Point spectrum of a Reynolds operator

Let T be a Reynolds operator on $\mathfrak{A}$, and let $\alpha \in \mathrm{PtSp}\,(T)$, so that for some $u \in \mathfrak{A}$, $u \neq 0$, we have $Tu = \alpha u$. Put $x = y = u$ in the Reynolds identity (1. 1). Assuming $\alpha \neq 0$, we get $Tu^2 = \alpha(2-\alpha)^{-1}u^2$, and more generally,

$$Tu^n = \frac{\alpha}{\alpha + n - \alpha n}\, u^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2. 1}$$

Write

$$\alpha_n = \frac{\alpha}{\alpha + n - \alpha n} \qquad (\alpha_1 = \alpha); \tag{2. 2}$$

if $u^n \neq 0$, α_n belongs to PtSp (T) and has u^n as a corresponding eigenelement. The points α_n for $n = 1, 2, \ldots$ all lie on the circle which passes through 0, 1 and α and is given parametrically by

$$z = \frac{\alpha}{\alpha + t - \alpha t} \qquad (-\infty < t \leqq \infty).$$

As t increases from 0 through 1 to ∞, z moves from 1 through α to 0. If u is nilpotent, α gives rise in this way to a finite set only of additional eigenvalues; but if u is not nilpotent and $\alpha \neq 1$, there is an infinite sequence $\{\alpha_n\}$ of eigenvalues, starting at α and accumulating on the circle at 0. We introduce some notation and terminology to describe this interesting situation.

Definition 1. The symbol $\odot$ will denote a (0, 1)-*circle*, that is, a circle in the complex plane passing through the points 0 and 1; for any $\beta \neq 0, 1$, $\odot_\beta$ stands for the (0, 1)-circle passing through the point β. The real axis will be counted for this purpose among the (0, 1)-circles.

A (finite or infinite) sequence $\{\alpha_n\}$ of eigenvalues of a Reynolds operator T, determined as in (2. 2) by an eigenvalue $\alpha \neq 0, 1$ (with a corresponding non-nilpotent eigenelement in the infinite case), will be called a (*finite* or *infinite*) *spectral sequence for T started by* α; $\odot_\alpha$ is called its *spectral circle.*

Suppose that f is a function which maps Reynolds operators to Reynolds operators. The spectral mapping theorem shows that f maps PtSp (T) to PtSp $(f(T))$ (with one possible exceptional point); since both these sets are disposed in some fashion on spectral circles when T is a Reynolds operator, one might conjecture that f in fact maps every (0, 1)-circle to a (0, 1)-circle, and so is a Möbius function. Certainly M_ϱ of (1. 6) maps (0, 1)-circles to (0, 1)-circles. In Theorem 3 we state and prove a result of this kind, which is however weakened in some respects. In the first place, to show that f maps (0, 1)-circles to (0, 1)-circles it is necessary to use the accumulating property of the infinite spectral sequences, so we have to require the existence of Reynolds operators on $\mathfrak{A}$ having non-nilpotent eigenelements. In fact, we suppose that $\mathfrak{A}$ admits such an operator which moreover has a spectral sequence which is 'isolated', in a sense to be defined. Secondly, the circle-mapping property (which is deduced only for a neighbourhood of 0) does not exclude certain compositions of Möbius and power transformations which arise when the mapping f is not conformal at 0, and further algebraic argument from (1. 1) is necessary to consider the admissibility of these functions. This matter is discussed in § 5, but left unsettled.

Though the details of the proof of Theorem 3 need careful treatment, the idea behind the argument is simple. We consider the image $f(\odot)$ under f of an isolated spectral circle $\odot$; if this is not a (0, 1)-circular arc near 0, spectral points on it give rise to infinite

spectral sequences near but not on $f(\odot)$, thus vitiating the assumption that $\odot$ is isolated. A continuum is then found of such circles, which map to (0, 1)-circles near 0, and its existence forces f to be of the required form. We begin with some preliminary remarks on conformal mappings.

3. Lemmas on conformal mappings

The first result embodies a particular form of the well-known fact that a conformal mapping is locally approximately linear. (In fact, since the mapping $z \to f(z)$ is not required to be conformal at $z = 0$, it involves rather more.)

Lemma 2. *Given that f is holomorphic in some disc neighbourhood $W = \{z: |z| < \delta\}$ of 0, with a zero at $z = 0$, consider the mapping $z \to f(z)$ of W to another neighbourhood $f(W)$ of the origin in the z-plane. Suppose without loss of generality that δ is so small that $1 \notin f(W)$, and f and f' have no zeros in $0 < |z| < \delta$.*

Let $f(\odot \cap W)$ denote the image of a (0, 1)-circular arc $\odot \cap W$, and let $\overline{\odot}$ denote that (0, 1)-circle which touches $f(\odot \cap W)$ at 0. Either (i) *the point set $f(\odot \cap W)$ coincides with $\overline{\odot}$ in $f(W)$, or* (ii) *$\overline{\odot} \cap f(\odot \cap W)$ does not accumulate at 0, i. e. there is some neighbourhood N of 0 containing no points of $\overline{\odot} \cap f(\odot \cap W)$ other than 0.*

Proof. Suppose that $\odot \cap W$ is given parametrically by

$$z = \frac{\alpha}{\alpha + t - \alpha t} = A(t) \qquad (t > t_0) \tag{3.1}$$

say, for some α. Then $f(\odot \cap W)$ is given parametrically by

$$z = f(A(t)) \qquad (t > t_0).$$

In order to specify the points of $\overline{\odot} \cap f(\odot \cap W)$ more easily, it is convenient to make the transformation $z \to \zeta$ where

$$\zeta = \frac{z}{1 - z}. \tag{3.2}$$

This is conformal except at $z = 1$: under it, $\odot$ and $\overline{\odot}$ go to lines l and $\bar{l}$ through $\zeta = 0$, and $f(\odot \cap W)$ to an arc γ, given parametrically by

$$\zeta = \frac{f(A(t))}{1 - f(A(t))} = F(A(t))$$

say; $\bar{l}$ is the tangent to γ at 0.

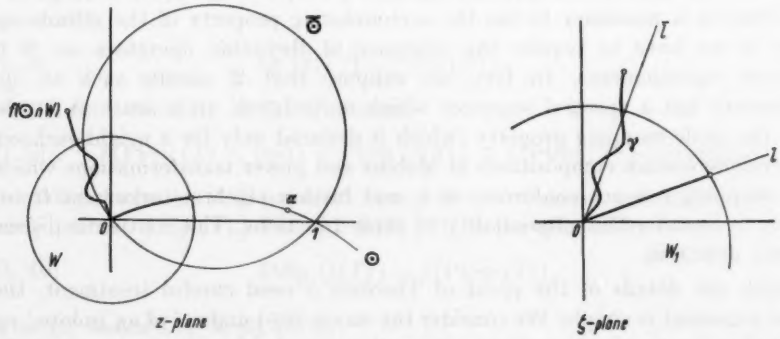


Figure 1

Let the resolution of F into real and imaginary parts be $F(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$. The slope of $\bar{l}$ is

$$m = \lim_{t \to \infty} \frac{\Psi(A(t))}{\Phi(A(t))}.$$

Thus the points of $\bar{l} \cap \gamma$ (and hence those of $\bar{\odot} \cap f(\odot \cap W)$) are given by those values of $t (> t_0)$ for which

$$m\Phi(A(t)) - \Psi(A(t)) = 0 \qquad \text{(if } m \text{ is finite)} \tag{3.3}$$

or

$$\Phi(A(t)) = 0 \qquad \text{(if } m = \pm\infty).$$

Assume first that m is finite, and consider the function G defined for a complex argument $s = \sigma + i\tau$ by

$$G(s) = (m + i)\, F\left(A\left(\frac{1}{s}\right)\right).$$

$G(s)$ has real part $U(\sigma, \tau) = m\Phi(A(1/s)) - \Psi(A(1/s))$. Since G is holomorphic on a disc Δ_1 containing $s = 0$, U has continuous partial derivatives of all orders near $s = 0$, and $U(\sigma, 0)$ is equal to the sum of its Maclaurin series.

Now suppose that $\zeta = 0$ is a limit-point of $\bar{l} \cap \gamma$, i. e. $\sigma = 0$ is a limit-point of zeros of $U(\sigma, 0)$. By Rolle's theorem, it is also a limit point of zeros of all partial derivatives $U_1^{(n)}(\sigma, 0)$ of U with respect to σ, and so

$$U(0, 0) = U_1'(0, 0) = U_1''(0, 0) = \cdots = 0,$$

the sum of the Maclaurin series for $U(\sigma, 0)$ is identically zero, and thus $U(\sigma, 0) = 0$ when $\sigma + i0$ is in Δ_1. Now Δ_1 is the disc $|A(1/s)| < \delta$; therefore (3.3) holds for all $t > t_0$. That is, the situation (i) in the statement of the lemma occurs if (ii) does not.

If m is infinite, we write instead $G(s) = F(A(1/s))$ and then continue as before.

The next lemma is the means by which we deduce from the circle-mapping property the form of the function.

Lemma 3. *Let f and W be as in Lemma 2. Let U denote one of the two open connected regions bounded by $|z| = \delta$ and two $(0, 1)$-circles $\odot'$ and $\odot''$.*

If the mapping $z \to f(z)$ sends every arc $\odot \cap W$ in U to another $(0, 1)$-circular arc, then f has the form

$$f(z) = \frac{z^k}{z^k + \omega(1 - z)^k} \tag{3.4}$$

for some complex constant $\omega \neq 0$, k being the order of the zero of f at $z = 0$.

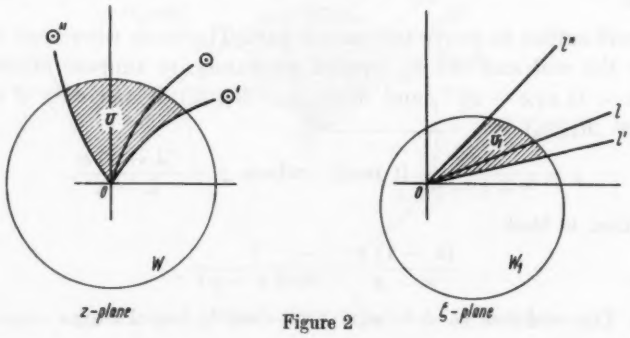


Figure 2

Proof. Make the transformation $z \to \zeta$ by (3. 2), from the z-plane to the ζ-plane. The circles $\odot'$, $\odot''$ and $\odot$ go to lines l' l'' and l through $\zeta = 0$, the disc W to a disc W_1 and the set U to a set U_1 (see Figure 2).

The transformation $z \to f(z)$ determines a mapping $\zeta \to H(\zeta)$ of U_1 into the ζ-plane, namely

$$\frac{z}{1-z} \to \frac{f(z)}{1-f(z)}$$

or

$$\zeta \to \frac{f\left(\dfrac{\zeta}{1+\zeta}\right)}{1-f\left(\dfrac{\zeta}{1+\zeta}\right)} = H(\zeta).$$

Here H is holomorphic on U_1 and $\zeta \to H(\zeta)$ maps line segments from 0 to line segments from 0. Therefore, given α in the wedge bounded by l' and l'' with $|\alpha| = 1$, there is a uniquely determined β with $|\beta| = 1$ such that one may write

$$H(\alpha t) = \beta u \tag{3. 5}$$

with t and u real and positive and sufficiently small; and α being given, this equation determines a one-to-one correspondence between t and u: u depends upon t and α.

Again, since there are no zeros of $H'(\zeta)$ in U_1 (a consequence of $1 \notin f(W)$), H determines a conformal mapping. The conformal property of preservation of angles implies that all circular arcs in U_1 with centre $\zeta = 0$ go to circular arcs with centre $\zeta = 0$. Therefore u remains fixed in (3. 5) if t is fixed and α allowed to vary: u is in fact independent of α.

Thus by differentiating (3. 5) with respect to t, and also with respect to α, we get

$$\alpha H'(\alpha t) = \beta \frac{du}{dt}, \quad tH'(\alpha t) = \frac{d\beta}{d\alpha} u.$$

Therefore

$$\frac{t}{u}\frac{du}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = \text{a real non-zero constant } k,$$

and so $u = at^k$, $\beta = b\alpha^k$, and $H(\zeta) = \omega^{-1}\zeta^k$ for some non-zero constant ω. Since H is holomorphic on W_1, k must be a positive integer. From the definition of H we obtain (3. 4).

Finally, we need the following simple property of the Möbius mappings M_ϱ defined by (1. 6).

Lemma 4. *$M_\varkappa(\odot_\alpha)$, the image of $\odot_\alpha$ under $z \to M_\varkappa(z)$, is distinct from $\odot_\alpha$ if and only if $\varkappa$ is not real. $M_\varkappa(\odot_\alpha)$ and $M_\lambda(\odot_\alpha)$ are distinct if and only if $\varkappa$ and λ do not lie on the same* (0, 1)*-circle.*

Proof. It will suffice to prove the second part. The cases where one or more of the (0, 1)-circles are the real axis can be treated separately, so suppose otherwise. A point of $M_\varkappa(\odot_\alpha)$ is $(\varkappa - 1)\,\alpha(\varkappa - \alpha)^{-1}$, and $M_\varkappa(\odot_\alpha) = M_\lambda(\odot_\alpha)$ if and only if this point lies on $M_\lambda(\odot_\alpha)$. Now $M_\lambda(\odot_\alpha)$ is

$$z = \frac{\gamma}{\gamma + t - \gamma t} \ (t \text{ real}), \quad \text{where } \gamma = \frac{(\lambda - 1)\,\alpha}{\lambda - \alpha}.$$

Thus the condition is that

$$\frac{(\varkappa - 1)\,\alpha}{\varkappa - \alpha} = \frac{\gamma}{\gamma + t - \gamma t}$$

for some real t. This reduces to $\lambda = \varkappa(\varkappa + t - \varkappa t)^{-1}$, i. e. $\lambda \in \odot_\varkappa$.

4. Special Reynolds operators

To use the results in the preceding paragraph, we need to single out a special class of Reynolds operators.

Definition 2. A spectral circle $\odot$ of a Reynolds operator S will be called *isolated* if it carries an infinite spectral sequence, and if there are two $(0, 1)$-circles $\odot'$ and $\odot''$ on either side of $\odot$ and an open connected set U, bounded by arcs of $\odot'$, $\odot''$ and some circle $|z| = \varepsilon$, such that U contains no points of $\mathrm{PtSp}\,(S)$ other than those on $\odot$.

A Reynolds operator for which there is at least one isolated spectral circle will be called *special.*

It is not evident, of course, that a given algebra $\mathfrak{A}$ admits any special Reynolds operators. If it admits one, then it will be seen that it admits infinitely many. The results to follow assume that $\mathfrak{A}$ admits a special Reynolds operator, and we do not examine the implications for $\mathfrak{A}$ of this requirement.

We come to the crucial lemma.

Lemma 5. *Suppose that $\mathfrak{A}$ admits a special Reynolds operator S. If f is such that*

(i) *f is holomorphic on an open set Δ containing* 0 *and* $\mathrm{Sp}\,(S)$, *with a zero at* 0, *and is not constant on any component of Δ which contains points of* $\mathrm{Sp}\,(S)$,

(ii) *$f(S)$ is a Reynolds operator,*

then f maps every isolated spectral circle $\odot$ of S to a $(0, 1)$-circle, at least in some neighbourhood of 0; *that is, there is a disc $W = \{z\colon |z| < \delta\}$ such that $f(\odot \cap W)$ is a $(0, 1)$-circular arc. The disc W does not depend upon $\odot$, or even upon S.*

Proof. By (i), there exists some disc W on which f satisfies the requirements of Lemma 2.

Let $\odot$ be any chosen isolated spectral circle of S. Let $\odot'$, $\odot''$ and U be as in Definition 2, so that $\odot$ carries all eigenvalues of S in U, including some infinite spectral sequence $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ which accumulates at 0. The curve $f(\odot \cap W)$ is defined, and by the spectral mapping theorem (1. 9) contains a sequence of points $f(\alpha_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ belonging to $\mathrm{PtSp}\,(f(S))$ and also accumulating at 0[3]). Let $\overline{\odot}$ be the $(0, 1)$-circle which touches $f(\odot \cap W)$ at 0.

Assume that $f(\odot \cap W)$ does not coincide with $\overline{\odot} \cap f(W)$. By Lemma 2, there is some disc neighbourhood N of 0 containing no points of $\overline{\odot} \cap f(\odot \cap W)$ other than 0. Consider the open subset Q of N bounded by $f(\odot' \cap W)$ and $f(\odot'' \cap W)$. Q may contain

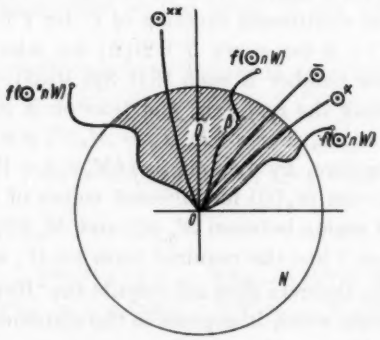


Figure 3

[3]) We can assume without loss of generality that $f(\alpha_n) \neq f(\infty)$ for $n = 1, 2, \ldots$.

certain points of $\mathrm{PtSp}(f(S))$ other than those on $f(\odot \cap W)$, including perhaps $f(\infty)$; but if so, they will not have 0 as a limit-point, by the definition of an isolated spectral circle, and we can diminish the radius of N until: [*] the only points of $\mathrm{PtSp}(f(S))$ in Q lie on $f(\odot \cap W)$. It is also clear that, after shrinking N still further if necessary, we can draw two (0, 1)-circular arcs $\odot^{\times}$ and $\odot^{\times\times}$ such that their intersections with N lie in Q and such that $f(\odot \cap W)$ (and therefore $\overline{\odot}$) lies between them.

Let β be an element of $\mathrm{PtSp}(f(S))$, say $f(\alpha_m)$, lying in N. The circle $\odot_\beta$ carries the spectral sequence $\{\beta_n\}$. Now this sequence accumulates at 0: for since S is special, we have $Su = \alpha u$ for some non-nilpotent element $u \in \mathfrak{A}$, and then $Su^m = \alpha_m u^m$, $f(S)\, u^m = f(\alpha_m)\, u^m = \beta u^m$ (by (1. 7)), so that β has a corresponding non-nilpotent eigenelement and the sequence $\{\beta_n\}$ does not terminate. Since β does not lie on $\overline{\odot}$, the circles $\odot_\beta$ and $\overline{\odot}$ are distinct, and since $f(\odot \cap W)$ touches $\overline{\odot}$ at 0, there is a neighbourhood of 0 in which $f(\odot \cap W)$ meets $\odot_\beta$ only at 0. But $\odot_\beta$ lies between $\odot^{\times}$ and $\odot^{\times\times}$, and so $\odot_\beta \cap N$ lies in Q. Therefore: [**] there are in Q elements β_n of $\mathrm{PtSp}\,(f(S))$ which do not lie on $f(\odot \cap W)$. Thus the assumption (ii) of Lemma 2 leads to the mutually contradictory statements [*] and [**], and hence the lemma implies that $f(\odot \cap W) = \overline{\odot} \cap f(W)$.

We can now state and prove our main result.

Theorem 3. *Let f be holomorphic on a connected open set Δ of the complex plane containing* 0, *where* $f(0) = 0$, *and let f be non-constant on Δ. Let $\mathfrak{A}$ admit a special Reynolds operator S belonging to $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, such that* $\mathrm{Sp}\,(S) < \Delta$.

Suppose f has the property: $f(T)$ is a Reynolds operator if T is a Reynolds operator in $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ with $\mathrm{Sp}\,(T) < \Delta$. *Then f must be of the form*

$$f(z) = f_k(z) = \frac{z^k}{z^k + \omega(1-z)^k} \tag{4. 1}$$

for some positive integer k and some complex constant ω.

Proof. Let a disc neighbourhood W be chosen for f, as in Lemma 2.

Since S is bounded, its resolvent set contains some neighbourhood of ∞. Let $\varkappa \in \mathrm{Res}\,(S)$. By Theorem 2, $M_\varkappa(S)$ is also a Reynolds operator, in $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. Suppose that $\odot$ is an isolated spectral circle for S; then $M_\varkappa(\odot)$ is easily seen to be an isolated spectral circle for $M_\varkappa(S)$ (If $Su = \alpha u$, then $M_\varkappa(S)\, u = M_\varkappa(\alpha)\, u$; therefore $M_\varkappa(\odot)$ certainly contains an infinite spectral sequence.) Thus $M_\varkappa(S)$ is also a special Reynolds operator.

We now show the existence of a set of special Reynolds operators $T_\varkappa$ having isolated spectral circles which fill a double crescent and all satisfy $\mathrm{Sp}\,(T_\varkappa) < \Delta$. It is known that $\mathrm{Sp}\,(T)$ is an upper semi-continuous function of T, for $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$[4]. Thus there exists an $\varepsilon > 0$ such that $\mathrm{Sp}\,(T) < \Delta$ for every $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ for which $\| S - T \| < \varepsilon$. So by Lemma 1, there is a positive number K such that $\mathrm{Sp}(M_\varkappa(S)) < \Delta$ if $|\varkappa| > K$. Draw any ray from the origin, not along the real axis, and take on it and outside $|z| = K$ some segment L with end-points $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. For $\varkappa \in L$, $T_\varkappa = M_\varkappa(S)$ is a special Reynolds operator such that $\mathrm{Sp}\,(T_\varkappa) < \Delta$: therefore, by Lemma 5, $f(M_\varkappa(\odot) \cap W)$ is a (0, 1)-circular arc. Lemma 4 shows that the circles $M_\varkappa(\odot)$ for different values of $\varkappa$ are distinct, and clearly they fill the double crescent region between $M_{\varkappa_1}(\odot)$ and $M_{\varkappa_2}(\odot)$. We can therefore apply Lemma 3, and conclude that f has the required form on W, and so throughout Δ.

Clearly the proof of the theorem does not require the 'Reynolds-preserving' hypothesis on f in the full force with which it appears in the statement: it would suffice merely that the $f(T_\varkappa)$ were Reynolds operators.

---

[4]) [3], Theorem 5. 2. 3.

The theorem would be improved if S were not required to be bounded, but merely closed, inasmuch as this would be less of a qualification on $\mathfrak{A}$. It is clear from the proof that if $\mathfrak{A}$ admits a special Reynolds operator in $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, then it admits such operators $T_\varkappa$, which are bounded, and a sufficiency of them. However, it is not obvious that $\mathfrak{A}$ admits such operators for which $\mathrm{Sp}\,(T_\varkappa) < \Delta$, since the device used in the proof to ensure this does not seem to extend to the case of S unbounded.

We next identify $f_k(T)$. Write $h_k(z) = (z^k + \omega(1-z)^k)^{-1}$.

Lemma 6. *Let $T \in \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, and suppose that* $\mathrm{Sp}\,(T)$ *does not contain any of the k roots of $z^k + \omega(1-z)^k = 0$*[5]*. Then $(T^k + \omega(E-T)^k)^{-1}$, $h_k(T)$ and $f_k(T)$ exist and belong to $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, and*

$$h_k(T) = (T^k + \omega(E-T)^k)^{-1}, \tag{4.2}$$

$$f_k(T) = T^k(T^k + \omega(E-T)^k)^{-1}. \tag{4.3}$$

Proof. If T is bounded, the lemma is a straightforward deduction from the operational calculus for $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. If T is unbounded, more care is necessary; we resort to two theorems of A. E. Taylor governing the use, in conjunction with the operational calculus for $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, of polynomials in an unbounded operator[6]. It is clear that $h_k(T)$ and $f_k(T)$ exist in $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. By the first theorem, since h_k has a zero of order k at ∞,

$$(T^k + \omega(E-T)^k)\,h_k(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (h_k(z))^{-1} h_k(z)\, R(z, T)\, dz = E.$$

By the second, if $x \in \mathfrak{D}(T)$ then

$$h_k(T)\,(T^k + \omega(E-T)^k)\,x = (T^k + \omega(E-T)^k)\,h_k(T)\,x = x.$$

Thus (4. 2) holds. By the first theorem also,

$$T^k h_k(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^k h_k(z)\, R(z, T)\, dz = f_k(T).$$

So (4. 3) holds. (In the excluded cases (4. 2) holds, but $f_k(T)$ may be undefined.)

5. Admissible values of k

There naturally arises the question: Is it true in Theorem 3 for *every* positive integer k that f_k maps Reynolds operators to Reynolds operators? We know from Theorem 2 that $k = 1$ is admissible, in this sense. It can be shown that $k = 2$ is not, as follows.

Suppose that T and $f_k(T)$ are both Reynolds operators. Applying (1. 1) to $f_k(T)$ (write $(T^k + \omega(E-T)^k)^{-1}x = a$, $(T^k + \omega(E-T)^k)^{-1}y = b$) we get the identity, which is independent of ω,

$$(E-T)^k\,(T^k a \cdot T^k b) = T^k\{T^k a \cdot (E-T)^k b + (E-T)^k a \cdot T^k b\} \qquad (\text{all } a, b \in \mathfrak{D}(T)).$$

When $k = 2$, this gives

$$\begin{aligned}(E - 2T + T^2)\,(T^2 a \cdot T^2 b) &= T^2\{T^2 a \cdot b + a \cdot T^2 b - 2\,(T^2 a \cdot Tb + Ta \cdot T^2 b) + 2\,T^2 a \cdot T^2 b\}\\ &= T^2(T^2 a \cdot b + a \cdot T^2 b) - 2\,T(E+T)\,(T^2 a \cdot T^2 b) + 2\,T^2(T^2 a \cdot T^2 b)\end{aligned}$$

[5]) We exclude the cases where k is even and $\omega = -1$, and where k is odd and $\omega = 1$, for which there are only $k-1$ roots. We also exclude the trivial case $\omega = 0$.

[6]) [3], Theorems 5. 11. 3 and 5. 11. 4.

i. e.

$$(E + T^2)(T^2 a \cdot T^2 b) = T^2(T^2 a \cdot b + a \cdot T^2 b) \qquad (\text{all } a, b \in \mathfrak{D}(T)).$$

Therefore if $k = 2$ is admissible, T^2 is a Reynolds operator when T is, and hence z^2 has the form $f_k(z)$ for some k and ω, which is impossible.

For the case $k = 3$, a more laborious calculation leads to

$$(E - T)\{(E + T^3)(T^3 a \cdot T^3 b) - T^3(T^3 a \cdot b + a \cdot T^3 b)\} = 0 \ (\text{all } a, b \in \mathfrak{D}(T)),$$

so that T^3 is a Reynolds operator if T is one and if $1 \notin \mathrm{PtSp}(T)$. Suppose an S exists in Theorem 3 for which $1 \notin \mathrm{PtSp}(S)$; then it follows from the proof of the theorem that z^3 has the form $f_k(z)$ for some k and ω, which again is impossible.

I am unable, so far, to settle the admissibility of general values of k.

Acknowledgment. I must thank Mr P. Daniell for drawing the diagrams.

References

[1] *M. Billik* and *G.-C. Rota*, On Reynolds operators in finite-dimensional algebras, J. of Math. and Mechanics **9** (1960), 927—932.

[2] *M.-L. Dubreil-Jacotin*, Etude algébrique des transformations de Reynolds, Colloque d'Algèbre supérieure, C. B. R. S., Louvain (1957), 9—27.

[3] *E. Hille* and *R. S. Phillips*, Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society Colloquium Publication **31**, Providence 1957.

[4] *G.-C. Rota*, Une théorie unifiée des martingales et des moyennes ergodiques, Comptes rendus **252** (1961), 2064—2066.

[5] *G.-C. Rota*, Reynolds Operators, Symposium in Applied Mathematics **16**, American Mathematical Society (to appear).

[6] *A. E. Taylor*, Introduction to functional analysis, New York 1961.

Eingegangen 17. Februar 1964

An Addition Theorem for the Associated Legendre Functions

By *B. E. Johnson* at Exeter

1. Introduction

If (ϑ_1, φ_1), (ϑ_2, φ_2) are two systems of polar coordinates on the sphere $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in R^3 then, for any positive integer n, $r^n P_n^m(\cos\vartheta_1)\, e^{im\varphi_1}$, $r^n P_n^m(\cos\vartheta_2)\, e^{im\varphi_2}$, $(m = -n, -n+1, \ldots, n)$, where the P_n^m are Legendre polynomials, are solutions of Laplace's equation in three dimensions. It follows from the completeness of these systems that each $P_n^m(\cos\vartheta_2)\, e^{im\varphi_2}$, can be expressed as a linear combination of the functions $P_n^l(\cos\vartheta_1)\, e^{il\varphi_1}$ $(l = -n, -n+1, \ldots, n)$. The coefficients in this expansion have been obtained by Gelfand and Šapiro [3], § 7. In the case $m = 0$ an extension of this theorem to all complex values of n is given by the addition theorem for Legendre functions (see [2] p. 168), which states that

$$P_n(\mu\nu + \sqrt{\mu^2 - 1}\,\sqrt{\nu^2 - 1}\,\cos\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_n^{-m}(\mu)\, P_n^m(\nu)\, e^{im\varphi}$$

the expansion being valid for $\Re(\mu) > 0$, $\Re(\nu) > 0$.

The object of this paper is to extend this theorem to the associated Legendre function P_n^m (m integral). In doing so certain coefficient functions are introduced which themselves satisfy an addition theorem. In the case $\Re(n) = -\frac{1}{2}$ these functions are used in the representations of the 2×2 real unimodular group [1].

2. The functions $c_n^{l,m}$

The formulae used here become undefined if n takes certain integral values. In all these cases the expressions, considered as functions of n, have removable discontinuities and, for such integers, are defined by their limiting values.

We define

$$(1) \qquad c_n^{l,m}(\mu) = \frac{\Gamma(n-l+1)}{2\pi i\,\Gamma(n-m+1)} \int_C 2^{-n} z^{-n-l-1} \left(\sqrt{\mu+1}\; z + \sqrt{\mu-1}\right)^{n+m} \times \left(\sqrt{\mu-1}\; z + \sqrt{\mu+1}\right)^{n-m} dz$$

where

(i) m, l are integers and n is a complex number.

(ii) μ is a complex number not on the half line $(-\infty, 1]$.

(iii) $\sqrt{\mu+1}, \sqrt{\mu-1}$ here as elsewhere in this paper, denote the principal values of the square roots. The quantities $\sqrt{\mu^2-1}$ and $\sqrt{\dfrac{\mu-1}{\mu+1}}$ are to be taken as $\sqrt{\mu+1}\sqrt{\mu-1}$ and $\dfrac{\sqrt{\mu-1}}{\sqrt{\mu+1}}$.

(iv) The nth root is defined by writing

$$[(\sqrt{\mu+1}\ z+\sqrt{\mu-1})\,(\sqrt{\mu-1}\ z+\sqrt{\mu+1})\,z^{-1}]^n$$
$$=(\mu+1)^n\left(1+\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\,z^{-1}\right)^n\left(1+\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\,z\right)^n$$

and taking the principal value of each of the roots on the right. The integrand is then defined continuously on the z plane cut along the segment from 0 to $-\sqrt{\dfrac{\mu-1}{\mu+1}}$ and the half line $-t\sqrt{\dfrac{\mu+1}{\mu-1}}$ $(t \geqq 0)$.

(v) C is a circle on the cut z plane containing the finite cut.

It follows from this definition that $\dfrac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-l+1)}\,c_n^{l,m}(\mu)$ is an analytic function of μ, for μ not on $(-\infty, 1]$, and of n.

If $\Re(\mu)>0$ we have

$$(2)\qquad 2^{-n}z^{-n}\,(\sqrt{\mu+1}\ z+\sqrt{\mu-1})^{n+m}\,(\sqrt{\mu-1}\ z+\sqrt{\mu+1})^{n-m}$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-l+1)}\,c_n^{l,m}(\mu)\,z^l,$$

the series being convergent for $\left|\dfrac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}}<|z|<\left|\dfrac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$ and uniformly absolutely for μ and z in a compact subset of this set.

Replacing z by z^{-1} and m by $-m$, the left hand side of (2) is unchanged so that

$$(3)\qquad \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-l+1)}\,c_n^{l,m}=\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+l+1)}\,c_n^{-l,-m}.$$

Writing the left hand side of (2) as

$$2^{-n}z^m(\mu+1)^n\left(1+\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\,z^{-1}\right)^{n+m}\left(1+\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\,z\right)^{n-m},$$

expanding by the binomial theorem, rearranging and equating powers of z, we get

$$(4)\qquad c_n^{l,m}(\mu)=\frac{(\mu+1)^n}{2^n(l-m)!}\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{2}(l-m)}F\left(-m-n,\ l-n;\ l-m+1;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)$$

where, for negative integral values of p, $(p!)^{-1}F(a,b;\ p+1;\ w)$ is taken as

$$[(-p)!]^{-1}\,a(a+1)\cdots(a-p-1)\,b(b+1)\cdots(b-p-1)\,w^{-p}\,F(a-p,\,b-p;\,1-p;\,w)$$

(see [2] p. 102 formula (19)). The relationship (4) holds for all values of μ not on $(-\infty, 1]$ and shows that $c_n^{l,m}(\mu)$ is an entire function of n. If $l-m$ is an even integer the values of $c_n^{l,m}$ on either side of that part of the cut in the μ plane between -1 and $+1$ are the same so that the cut need only be along $(-\infty, -1)$. We see from this formula that we could consider non integral values of l and m.

Using

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$$

we have

$$c_n^{l,m} = c_{-n-1}^{l,m}.$$

From this and (2) we have

$$(5) \qquad 2^{n+1} z^{n+1} \left(\sqrt{\mu+1}\, z + \sqrt{\mu-1}\right)^{m-n-1} \left(\sqrt{\mu-1}\, z + \sqrt{\mu+1}\right)^{-m-n-1} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(-n-m)}{\Gamma(-n-l)} c_n^{l,m}(\mu)\, z^l.$$

Using

$$F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z)$$

we have

$$c_n^{l,m} = c_n^{-m,-l}.$$

Combining this with (3) we get

$$c_n^{m,l} = \frac{\Gamma(n+l+1)\,\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-l+1)\,\Gamma(n+m+1)} c_n^{l,m}.$$

Comparing (4) with the expression for the Legendre function in terms of the hypergeometric function (equation (14) of [2], p. 124) we see

$$c_n^{l,0} = P_n^l,$$
$$c_n^{0,m} = P_n^{-m}.$$

Many of the formulae developed in the theory of the Legendre functions can be generalised to the $c_n^{l,m}$ functions, in fact the author does not know of any formula which fails to generalise.

It follows from (4) that $c_n^{l,m} = 0$ if and only if n is an integer and $l \leqq n$ and $m < n$ or if $l < -n$ and $m \geqq -n$.

3. The addition theorem for $c_n^{l,m}$

Let now μ, ν be complex numbers with $\Re(\mu) > 0$, $\Re(\nu) > 0$. If

$$(6) \qquad \left|\frac{(\mu-1)(\nu-1)}{(\mu+1)(\nu+1)}\right|^{\frac{1}{2}} < |w| < \left|\frac{(\mu+1)(\nu+1)}{(\mu-1)(\nu-1)}\right|^{\frac{1}{2}}$$

then, since

$$\frac{1}{|w|}\left|\frac{\nu-1}{\nu+1}\right|^{\frac{1}{2}} < \left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{|w|}\left|\frac{\nu+1}{\nu-1}\right|^{\frac{1}{2}}$$

there exists a number ϱ common to the intervals

$$\left(\frac{1}{|w|}\left|\frac{\nu-1}{\nu+1}\right|^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{|w|}\left|\frac{\nu+1}{\nu-1}\right|^{\frac{1}{2}}\right) \text{ and } \left(\left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right|^{\frac{1}{2}}, \left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right|^{\frac{1}{2}}\right).$$

Hence

$$2^{-n} z^{-n} w^{-n} \left(\sqrt{\nu+1}\, zw + \sqrt{\nu-1}\right)^{n+m} \left(\sqrt{\nu-1}\, zw + \sqrt{\nu+1}\right)^{n-m} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-l+1)} c_n^{l,m}(\nu)\, z^l w^l$$

and

$$2^{n+1}(-z)^{-n-1}\left(-\sqrt{\mu+1}\,z^{-1}+\sqrt{\mu-1}\right)^{k-n-1}\left(-\sqrt{\mu-1}\,z^{-1}+\sqrt{\mu+1}\right)^{-k-n-1}$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l\frac{\Gamma(-n-k)}{\Gamma(-n-l)}\,c_n^{l,k}(\mu)\,z^{-l}$$

the series converging uniformly absolutely for $|z|=\varrho$. Multiplying these expressions, dividing by z and integrating round the circle C determined by $|z|=\varrho$ we get, since

$$(-1)^l\frac{\Gamma(n-m+1)\,\Gamma(-n-k)}{\Gamma(n-l+1)\,\Gamma(-n-l)}\,c_n^{l,k}(\mu)\,c_n^{l,m}(\nu)$$
$$=(-1)^l\frac{\Gamma(n-m+1)\,\Gamma(-n-k)\,\Gamma(n-l+1)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-l+1)\,\Gamma(-n-l)\,\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(n+l+1)}\,c_n^{k,l}(\mu)\,c_n^{l,m}(\nu),$$

that

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C(-1)^{n+k+1}\left(\sqrt{\mu-1}\,z-\sqrt{\mu+1}\right)^{-n+k-1}\left(\sqrt{\mu+1}\,z-\sqrt{\mu-1}\right)^{-n-k-1}$$
$$\times\left(\sqrt{\nu+1}\,zw+\sqrt{\nu-1}\right)^{n+m}\left(\sqrt{\nu-1}\,zw+\sqrt{\nu+1}\right)^{n-m}dz$$
$$=\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-k+1)}\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_n^{k,l}(\mu)\,c_n^{l,m}(\nu)\,w^l.$$

Transforming the integral by the substitution

$$z=\frac{\sqrt{\mu+1}\,\zeta+\sqrt{\mu-1}}{\sqrt{\mu-1}\,\zeta+\sqrt{\mu+1}}$$

it becomes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}4^{-n}\zeta^{-n-k-1}w^{-n}$$
$$\times\left[\left(\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu+1}\,w+\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu-1}\right)\zeta+\left(\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu+1}\,w+\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu-1}\right)\right]^{n+m}$$
$$\times\left[\left(\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu-1}\,w+\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu+1}\right)\zeta+\left(\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu-1}\,w+\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu+1}\right)\right]^{n-m}d\zeta.$$

Writing

$$\lambda=\mu\nu+\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{\nu^2-1}\,(w+w^{-1})$$

the circles $|w|=$ constant are mapped two to one onto the ellipses with foci at $\mu\nu\pm\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{\nu^2-1}$, the circle $|w|=1$ being mapped onto the segment joining these points, the points $w=-\left[\frac{(\mu-1)(\nu-1)}{(\mu+1)(\nu+1)}\right]^{\pm\frac{1}{2}}$ corresponding to $\lambda=-1$, and the points $w=-\left[\frac{(\mu-1)(\nu+1)}{(\mu+1)(\nu-1)}\right]^{\pm\frac{1}{2}}$ corresponding to $\lambda=1$. The annular region determined by (6) is thus mapped two to one onto an elliptical region in the λ plane containing the point $\lambda=1$ and whose boundary contains the point $\lambda=-1$. It follows that the set of points w corresponding to values of λ in $(-\infty, 1]$ does not disconnect the annular region and that no points in the region correspond to values of λ in $(-\infty,-1]$.

We shall also write

$$\sqrt{\lambda^2-1}\,\omega_1=\nu\sqrt{\mu^2-1}+\frac{1}{2}(\mu+1)\sqrt{\nu^2-1}\,w+\frac{1}{2}(\mu-1)\sqrt{\nu^2-1}\,w^{-1}$$

and

$$\sqrt{\lambda^2-1}\,\omega_2=\mu\sqrt{\nu^2-1}+\frac{1}{2}(\nu-1)\sqrt{\mu^2-1}\,w+\frac{1}{2}(\nu+1)\sqrt{\mu^2-1}\,w^{-1}.$$

We then have

$$(7)\quad \left(\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu+1}\,w+\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu-1}\right)\zeta+\left(\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu+1}\,w+\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu-1}\right)$$
$$=\frac{2w\sqrt{\lambda-1}\left(\sqrt{\lambda+1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda-1}\right)}{\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu-1}\,w+\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu+1}}$$

and

$$(8)\quad \left(\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu-1}\,w+\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu+1}\right)\zeta+\left(\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu-1}\,w+\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu+1}\right)$$
$$=\frac{2w\sqrt{\lambda+1}\left(\sqrt{\lambda-1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda+1}\right)}{\sqrt{\mu+1}\sqrt{\nu+1}\,w+\sqrt{\mu-1}\sqrt{\nu-1}}$$

the product of these expressions being

$$2w\omega_1^{-1}\left(\sqrt{\lambda+1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda-1}\right)\left(\sqrt{\lambda-1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda+1}\right)$$

and their quotient

$$\omega_2^{-1}\left(\sqrt{\lambda+1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda-1}\right)\left(\sqrt{\lambda-1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda+1}\right)^{-1},$$

so that the integral becomes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C 2^{-n}\zeta^{-n-k-1}\omega_1^{-n}\omega_2^{-m}\left(\sqrt{\lambda+1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda-1}\right)^{n+m}\left(\sqrt{\lambda-1}\,\zeta\omega_1+\sqrt{\lambda+1}\right)^{n-m}d\zeta$$

and putting $\zeta_0=\zeta\omega_1$ we get

$$(9)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} 2^{-n}\zeta_0^{-n-k-1}\omega_1^k\omega_2^{-m}\left(\sqrt{\lambda+1}\,\zeta_0+\sqrt{\lambda-1}\right)^{n+m}$$
$$\times\left(\sqrt{\lambda-1}\,\zeta_0+\sqrt{\lambda+1}\right)^{n-m}d\zeta_0$$
$$=\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-k+1)}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}c_n^{k,l}(\mu)\,c_n^{l,m}(\nu)\,w^l.$$

The contour C_0 is a circle. The points $\zeta_0=0,\infty,-\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}},-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}$ correspond to $z=\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}},\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}$, as can be seen directly, and to $z=-\frac{1}{w}\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu-1}}$, $-\frac{1}{w}\sqrt{\frac{\nu-1}{\nu+1}}$, as can be seen from (7) and (8), so that C_0 is described in the positive sense, contains the points $0,-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}$ but not $-\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}$. Hence the left hand side of (9) differs from

$$\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-k+1)}c_n^{k,m}(\lambda)\,\omega_1^k\omega_2^{-m}$$

by a multiplicative factor $e^{2\pi inp}$ where p is an integer. However, since each side of (9) is an analytic function of w, μ and ν, $e^{2\pi inp}$ is a constant and can be obtained by taking $w=1$, μ, ν real and >1. In this case $\omega_1=1$, $\omega_2=1$ and $\zeta=\zeta_0$. Since the point corresponding to $z=1$ is $\zeta_0=1$ we see that the integrand in (9) is to be taken as real at $\zeta_0=1$ so that $e^{2\pi inp}=1$. We thus have

$$c_n^{k,m}(\lambda)\,\omega_1^k\omega_2^{-m}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_n^{k,l}(\mu)\,c_n^{l,m}(\nu)\,w^l$$

the expansion being valid for $\Re(\mu) > 0$, $\Re(\nu) > 0$, w in the annular region defined by (6) and λ, μ, ν not real and $\leqq 1$. The series converges uniformly absolutely for w, μ, ν confined to compact subsets of these regions. If the difference $k - m$ is even no restriction need be placed on λ. If n is a non negative integer, $k \leqq n$ and $m \geqq -n$ or if n is a negative integer, $k < -n$ and $m > n$, then the series is finite.

If $m = 0$ we get

$$P_n^k(\lambda)\, \omega_1^k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_n^{k,l}(\mu)\, P_n^l(\nu)\, w^l$$

which is the addition theorem for the function P_n^k.

References

[1] *V. Bargmann*, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 568—648.

[2] *A. Erdélyi*, *W. Magnus*, *F. Oberhettinger* and *F. G. Tricomi*, Higher transcendental functions I, New York 1953.

[3] *I. M. Gelfand* and *Z. Ya. Šapiro*, Representations of the group of rotations of 3-dimensional space and their applications, American Math. Soc. Translations (2) **2** (1956), 207—316.

Eingegangen 22. Februar 1964

Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper

Von *Dieter Pumplün* in Münster (Westf.)

Herrn Professor Dr. Hans Petersson zum 60. Geburtstag gewidmet

---

H. Hasse beweist in [1][1]) den folgenden Satz (vgl. [1], S. 115, Satz 39)[2]):

Ist $K = \mathsf{P}(\sqrt{-f})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper (P sei der Körper der rationalen Zahlen), dessen Führer f genau zwei verschiedene Primteiler $p \neq 2$, q enthält, so ist die Anzahl $\frac{h}{2}$ der Klassen im Hauptgeschlecht von K durch 2 teilbar oder nicht, je nachdem $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ oder -1 ist. Man kann das auch so ausdrücken, daß unter den obigen Voraussetzungen für die Klassenzahl h von K

$$h \equiv 1 - \left(\frac{q}{p}\right) \bmod 4 \tag{1}$$

gilt, wobei $\left(\frac{q}{p}\right)$ wie üblich das Legendresymbol bezeichnet. Im Anschluß an den Satz bemerkt H. Hasse, daß ihm eine Verallgemeinerung für den Fall, daß f mehr als zwei verschiedene Primteiler enthält, nicht gelungen ist. Die Kongruenz (1) ist eine Verallgemeinerung der wohlbekannten Tatsache (vgl. z. B. [2], S. 389, V a und S. 395, V b), daß für die Klassenzahl h der quadratischen Zahlkörper, deren Diskriminante durch genau eine Primzahl teilbar ist, die Kongruenz

$$h \equiv 1 \bmod 2 \tag{2}$$

erfüllt ist. Für den Fall, daß die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers durch genau n verschiedene Primzahlen teilbar ist, $n > 2$, weiß man nur, daß für die Klassenzahl h

$$h \equiv 0 \bmod 2^{n-1} \tag{3}$$

ist (vgl. [1], S. 50, Satz 12 und [3], S. 179, Satz 132), ein Ergebnis, welches schwächer als die Aussagen (2) und (1) für $n = 1, 2$ ist. Das Resultat (3) ist daher sehr unbefriedigend,

---

[1]) Mit eckigen Klammern wird auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit verwiesen.

[2]) In seiner Arbeit „Über die Anzahl der Klassen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante" (Acta Mathematica **19** (1895)) gibt *A. Hurwitz* in anderem Zusammenhang einen elementaren Beweis für diesen Satz.

und es ist nicht einzusehen, warum für $n > 2$ nicht ebenfalls Aussagen über den Wert von h mod 2^n gemacht werden können, bzw. warum man in diesem Fall mit (3) vorlieb nehmen muß. Im folgenden werden Verallgemeinerungen von (1) und (2) für beliebiges n bewiesen. Da auch für reell-quadratische Körper, deren Diskriminante genau eine Primzahl enthält, die Kongruenz (2) richtig ist, ergibt sich auch in diesem Fall die Frage nach einer Verallgemeinerung. Der Beweis von Aussagen, die den unten aufgeführten Sätzen analog sind, gestaltet sich im reellen Fall sehr viel schwieriger, da bei reell-quadratischen Körpern die Klassenzahl durch die Klassenzahlformel mit der Grundeinheit verbunden ist. Da man jedoch die Kongruenz (1) auch im reellen Fall beweisen kann — man hat lediglich anstelle der Klassenzahl h die Klassenzahl im engeren Sinn h^* zu nehmen (zur Definition von h^* vgl. [3], S. 179) — und man auch andere spezielle von den weiter unten aufgeführten Kongruenzen übertragen kann, hoffe ich, daß es mir in absehbarer Zeit gelingen wird, auch für reell-quadratische Körper, deren Diskriminante genau n verschiedene Primteiler enthält, den Wert von h^* mod 2^n zu bestimmen. Der Beweisgedanke der im folgenden bewiesenen Sätze ergab sich bei dem Versuch, eine Arbeit von H. Petersson [4] zu verallgemeinern.

Bevor wir mit den Beweisen beginnen, empfiehlt es sich, zur besseren Formulierung der Aussagen einige Bezeichnungen einzuführen, die dann im folgenden immer festgehalten werden. Die Buchstaben p und q bedeuten immer ungerade Primzahlen. Ist n eine natürliche Zahl, so setzen wir $\alpha_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ und bezeichnen mit α immer eine nicht leere Teilmenge von α_0. Für ganzes x sei

$$\chi_4(x) := \begin{cases} (-1)^{\frac{x-1}{2}}, & \text{wenn } x \equiv 1 \bmod 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ungerades ganzes x setzt man $x^* := x\chi_4(x)$ und definiert damit für ganzes x

$$\chi_8(x) := \begin{cases} (-1)^{\frac{x^*-1}{4}}, & \text{wenn } x \equiv 1 \bmod 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_8 := \chi_4\chi_8.$$

Bezeichnen wir für einen Restklassencharakter χ den Führer mit $f(\chi)$, so sieht man, daß χ_4, χ_8 und $\tilde{\chi}_8$ Restklassencharaktere mit den Führern $f(\chi_4) = 4, f(\chi_8) = f(\tilde{\chi}_8) = 8$ sind.

Im folgenden seien die q_ν ungerade Primzahlen, $1 \leqq \nu \leqq n$, $u := \prod_{\nu=1}^{n} q_\nu$ und $f := 2^a u$ mit $a = 0, 2, 3$. Man setzt

$$l(f) := \begin{cases} n+1 & \text{für } a \neq 0, \\ n & \text{für } a = 0, \end{cases}$$

und

$$m_\alpha := \prod_{\nu \in \alpha} q_\nu, \quad \chi_\alpha(x) := \left(\frac{x}{m_\alpha}\right),$$

wobei $\left(\frac{x}{m_\alpha}\right)$ das Jacobische bzw. das Kroneckersche Symbol bedeutet. Ferner schreibt man abkürzend:

$$\chi_\nu := \chi_{\{\nu\}}, \quad \chi_{\alpha,4} := \chi_\alpha\chi_4, \quad \chi_{\alpha,8} := \chi_\alpha\chi_8, \quad \tilde{\chi}_{\alpha,8} := \chi_\alpha\tilde{\chi}_8.$$

Ist m eine natürliche Zahl und χ ein Restklassencharakter, so sei

$$g(\chi, m) := \prod_{p/m} (1 - \chi(p)),$$

wobei $\prod_{p/m}$ hier und im folgenden bedeutet, daß das Produkt über alle Primteiler p von m zu erstrecken ist. Definiert man für natürliches k und ganzes x

$$\psi_k(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } (x, k) = 1, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

so ist ψ_k offenbar der Hauptcharakter mod k. — d bezeichne immer die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers; ist d/f, d. h. $|d| = 2^a m_\alpha$ mit $a = 0, 2, 3$, so sei

$$\chi_d := \begin{cases} \chi_\alpha & \text{für } a = 0, \\ \chi_{\alpha,4} & \text{für } a = 2, \\ \chi_{\alpha,8} & \text{für } \chi_4(m_\alpha) \cdot \operatorname{sig} d = +1, \\ \tilde{\chi}_{\alpha,8} & \text{für } \chi_4(m_\alpha) \cdot \operatorname{sig} d = -1. \end{cases}$$

$h(d)$ bedeute immer die Klassenzahl des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{d})$, wobei P der Körper der rationalen Zahlen ist. Mit $t := f \cdot |d|^{-1}$ setze man

$$\chi_d^* := \chi_d \psi_t$$

und für natürliches m und Restklassencharakter χ

$$S(\chi, m) := \sum_{\nu=1}^{m} \chi(\nu) \cdot \nu.$$

Mit diesen Bezeichnungen beweisen wir zuerst zwei leichte Hilfssätze.

Lemma 1. *Sind m und k zwei teilerfremde natürliche Zahlen, so läßt sich k in der Form $k = 2^a t$ schreiben, wobei t ungerade und quadratfrei ist und $a = 0, 2, 3$, und ist χ ein Restklassencharakter* mod m, *welcher nicht der Hauptcharakter ist, so gilt*

$$S(\chi\psi_k, mk) = k g(\chi, k)\, S(\chi, m).$$

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach den Primteilern von t geführt, und der Faktor 2^a wird gesondert behandelt. Sei p also eine ungerade zu m teilerfremde Primzahl. Wir können dann aufspalten

$$S(\chi\psi_p, mp) = S_1 - S_2,$$

wobei

$$S_1 := \sum_{j=1}^{mp} \chi(j) \cdot j, \quad S_2 := \sum_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \bmod p}}^{mp} \chi(j) \cdot j.$$

Zur Berechnung von S_1 schreibt man $j = \mu + \lambda m$, $1 \leqq \mu \leqq m$, $0 \leqq \lambda \leqq p - 1$, und erhält

$$S_1 = \sum_{\mu=1}^{m} \left(\sum_{\lambda=0}^{p-1} \chi(\mu)\, \mu + \chi(\mu)\, m \sum_{\lambda=0}^{p-1} \lambda \right) = p S(\chi, m),$$

da $\chi \neq \psi_m$ ist. Und da trivialerweise

$$S_2 = p\chi(p)\, S(\chi, m)$$

gilt, so erhält man

$$S(\chi\psi_p, mp) = pg(\chi, p)\, S(\chi, m).$$

Ebenso leicht errechnet man, daß, wenn $a \neq 0$,

$$S(\chi\psi_2, 2^a m) = 2^a g(\chi, 2^a)\, S(\chi, m)$$

ist, und hat damit das Lemma bewiesen.

Lemma 2. *Ist d die Diskriminante eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers und gilt d/f, so ist*

$$S(\chi_d^*, f) = -fg(\chi_d, f)\, h(d) \text{ für } d \neq 3, -4,$$
$$S(\chi_{-3}^*, f) = -(f/3)\, g(\chi_{-3}, f),$$
$$S(\chi_{-4}^*, f) = -(f/2)\, g(\chi_4, f).$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich leicht aus Lemma 1 zusammen mit der Klassenzahlformel für imaginär-quadratische Zahlkörper (vgl. [2], S. 387, (2a)).

Für die nun folgenden Beweise erweist es sich als zweckmäßig, eine Gruppe von „Signaturvektoren" einzuführen. Zwei Elemente der Menge

$$E_n := \{\mathfrak{e} : \mathfrak{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),\ \varepsilon_\nu = \pm 1 \text{ für } 1 \leqq \nu \leqq n\}$$

heißen gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. Sind $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}' \in E_n$, $\mathfrak{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\mathfrak{e}' = (\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')$, so sei

$$\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}' := (\varepsilon_1\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n\varepsilon_n').$$

Man sieht sofort, daß E_n unter dieser Verknüpfung eine abelsche Gruppe der Ordnung $|E_n| = 2^n$ mit dem Einselement $\mathfrak{e}_0 := (1, 1, \ldots, 1)$ wird.

Satz 1. *Geht 2 genau zur zweiten Potenz in f auf, so gilt:*

$$(1 - \psi_3(f))\, g(\chi_{-3}, f) + \frac{g(\chi_4, f)}{2} + \sum_{\substack{d/f,\, d<0 \\ d \neq -3, -4}} g(\chi_d, f)\, h(d) \equiv \frac{\varphi(f)}{2} - \chi_4\left(\frac{f}{4}\right) \frac{\varphi(f)}{4} \bmod 2^{l(f)},$$

wobei φ wie üblich die Eulersche Funktion bezeichnet.

Beweis. $\mathfrak{x}(j) := (\chi_4(j), \chi_1(j), \ldots, \chi_n(j))$ induziert offenbar einen surjektiven Homomorphismus der primen Restklassengruppe mod f auf E_{n+1}, und es gilt daher

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=\mathfrak{e}_0}}^{f} 1 = \frac{\varphi(f)}{2^{n+1}}.$$

$S := \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=\mathfrak{e}_0}}^{f} j$ ist offenbar eine natürliche Zahl, und da außerdem aus $\mathfrak{x}(j) = \mathfrak{e}_0$ noch $\chi_4(j) = 1$ und damit $j \equiv 1 \bmod 4$ folgt, so erhalten wir

$$S \equiv \frac{\varphi(f)}{2^{n+1}} \bmod 4. \tag{4}$$

Andererseits ist

$$2^{n+1}\cdot S = \sum_{j=1}^{f} j\psi_f(j)\,(1+\chi_4(j))\prod_{\nu=1}^{n}(1+\chi_\nu(j))$$
$$= S(\psi_f, f) + S(\chi_4^*, f) + (1-\psi_3(f))\,S(\chi_{-3}^*, f) + \sum_{\substack{d/f,\, d<0\\ d\neq -3,-4}} S(\chi_d^*, f),$$

denn für $d>0$ gilt $\chi_d^*(-1)=1$ und damit $S(\chi_d^*, f)=0$. Da $S(\psi_f, f)=\frac{f\varphi(f)}{2}$ ist, erhalten wir aus Lemma 2

$$2^{n+1}\cdot S = \frac{f\varphi(f)}{2} - \frac{f}{2}g(\chi_4, f) + (1-\psi_3(f))\frac{f}{3}g(\chi_{-3}, f) - f\sum_{\substack{d/f,\, d<0\\ d\neq -3,-4}} g(\chi_d, f)\,h(d)$$

und daraus

$$2^{n-1}S = -\frac{f}{4\cdot 3^\delta}\Delta \text{ mit } \delta := 1-\psi_3(f)$$

und

$$\Delta := -3^\delta\frac{\varphi(f)}{2} + 3^\delta\frac{g(\chi_4, f)}{2} + \delta g(\chi_{-3}, f) + 3^\delta\sum_{\substack{d/f,\, d<0\\ d\neq -3,-4}} g(\chi_d, f)\,h(d).$$

Wie man sofort sieht, sind Δ und die ersten drei Summanden auf der rechten Seite $\equiv 0 \bmod 2^{n-1}$, also ist auch die Summe auf der rechten Seite $\equiv 0 \bmod 2^{n-1}$, und man bekommt:

$$\Delta \equiv -(-1)^\delta\frac{\varphi(f)}{2} + (-1)^\delta\frac{g(\chi_4, f)}{2} - \delta g(\chi_{-3}, f) + (-1)^\delta\sum_{\substack{d/f,\, d<0\\ d\neq -3,-4}} g(\chi_d, f)\,h(d) \bmod 2^{n+1}.$$

Es ist also wegen (4):

$$-\frac{f}{4}\Delta \equiv 3^\delta\frac{\varphi(f)}{4} \equiv (-1)^\delta\frac{\varphi(f)}{4} \bmod 2^{n+1}, \tag{5}$$

da $\frac{\varphi(f)}{4}\equiv 0 \bmod 2^{n-1}$ ist. Berücksichtigt man

$$\frac{f}{4}\frac{\varphi(f)}{4} \equiv \chi_4\left(\frac{f}{4}\right)\frac{\varphi(f)}{4} \bmod 2^{n+1}$$

und multipliziert (5) mit $\chi_4\left(\frac{f}{4}\right)$, so wird

$$\frac{f}{4}\left(\chi_4\left(\frac{f}{4}\right)\Delta + (-1)^\delta\frac{\varphi(f)}{4}\right) \equiv 0 \bmod 2^{n+1}$$

und wegen $\frac{f}{4}\equiv 1 \bmod 2$

$$\Delta \equiv -(-1)^\delta\chi_4\left(\frac{f}{4}\right)\frac{\varphi(f)}{4} \bmod 2^{n+1},$$

und das ist die Satzbehauptung.

Satz 2. *Geht 2 genau zur dritten Potenz in f auf, so gilt:*

$$\text{(I)}\quad (1-\psi_3(f))\,g(\chi_{-3}, f) + \sum_{\substack{\alpha\\ m_\alpha\equiv -1 \bmod 4\\ m_\alpha\neq 3}} g(\chi_\alpha, f)\,h(-m_\alpha)$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha\\ m_\alpha\equiv -1 \bmod 4}} g(\chi_{\alpha,8}, f)\,h(-8m_\alpha) \equiv 0 \bmod 2^{l(f)},$$

$$\text{(II)}\quad g(\tilde{\chi}_8, f) + (1-\psi_3(f))\, g(\chi_{-3}, f) + \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv -1 \bmod 4 \\ m_\alpha \neq 3}} g(\chi_\alpha, f)\, h(-m_\alpha)$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv 1 \bmod 4}} g(\tilde{\chi}_{\alpha,8}, f)\, h(-8m_\alpha) \equiv \frac{f}{8}\frac{\varphi(f)}{4} \bmod 2^{l(f)},$$

$$\text{(III)}\quad \sum_{\substack{d/f,\ d<0 \\ d \neq -3,-4}} g(\chi_d, f)\, h(d) + \frac{g(\chi_4, f)}{2} - (1-\psi_3(f))\, g(\chi_{-3}, f)$$

$$\equiv \frac{\varphi(f)}{2} - \frac{f}{8}\frac{\varphi(f)}{8} \bmod 2^{l(f)+1}.$$

Hier und im folgenden bedeutet $\sum_\alpha$ immer, daß über alle nicht leeren Teilmengen $\alpha < \alpha_0$ zu summieren ist.

Beweis. (I). Ähnlich wie beim Beweis von Satz 1 setzen wir für ganzes j

$$\mathfrak{y}(j) := (\chi_0(j), \chi_1(j), \ldots, \chi_n(j))$$

und

$$S := \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{y}(j)=\mathfrak{e}_0}}^{f} j$$

und rechnen leicht nach, daß

$$2^{n+1} S = S(\psi_f, f) + \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv -1 \bmod 4}} S(\chi_\alpha^*, f) + \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv -1 \bmod 4}} S(\chi_{\alpha,8}^*, f),$$

oder, nach Lemma 2,

$$2^{n+1} S = \frac{f\varphi(f)}{2} - (1-\psi_3(f))\frac{f}{3} g(\chi_{-3}, f)$$

$$- f \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv -1 \bmod 4 \\ m_\alpha \neq -3}} g(\chi_\alpha, f)\, h(-m_\alpha) - f \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv 1 \bmod 4}} g(\chi_{\alpha,8}, f)\, h(-8m_\alpha)$$

ist. Setzen wir nun wieder $\delta := 1 - \psi_3(f)$ und

$$\Delta := -3^\delta \frac{\varphi(f)}{2} + \delta g(\chi_{-3}, f) + 3^\delta \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv -1 \bmod 4 \\ m_\alpha \neq 3}} g(\chi_\alpha, f)\, h(-m_\alpha)$$

$$+ 3^\delta \sum_{\substack{\alpha \\ m_\alpha \equiv -1 \bmod 4}} g(\chi_{\alpha,8}, f)\, h(-8m_\alpha),$$

so erhalten wir:

$$2^{n+1} S = -\frac{f}{3^\delta}\Delta \text{ oder } 2^{n-2} S = -\frac{f}{8\cdot 3^\delta}\Delta.$$

Wir wollen nun den Kongruenzwert von S mod 8 berechnen. Wie man sofort sieht, induziert $\mathfrak{y}$ einen surjektiven Homomorphismus der primen Restklassengruppe $\mathfrak{P}_f$ auf E_{n+1} und, wenn wir den Kern von $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{y})$ bezeichnen, ist

$$\chi_4 : \mathfrak{K}(\mathfrak{y}) \to E_1$$

ebenfalls ein surjektiver Homomorphismus. Nun folgt $\chi_8(j) = 1$ aus $\mathfrak{y}(j) = \mathfrak{e}_0$, d. h. $j \equiv \pm 1 \bmod 8$, und man hat $j \equiv 1 \bmod 8$ dann und nur dann, wenn $\chi_4(j) = 1$ ist. Es gilt also:

$$S \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{y}(j)=\mathfrak{e}_0 \\ j\equiv 1 \bmod 8}}^{f} j + \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{y}(j)=\mathfrak{e}_0 \\ j\equiv -1 \bmod 8}}^{f} j \equiv \frac{\varphi(f)}{2^{n+2}} - \frac{\varphi(f)}{2^{n+2}} \equiv 0 \bmod 8,$$

also $2^{n-2}S \equiv 0 \bmod 2^{n+1}$ bzw. $\Delta \equiv 0 \bmod 2^{n+1}$, und das ist gerade die Satzbehauptung.

Die Behauptungen II und III werden völlig analog bewiesen, indem man bei II die Abbildung

$$\mathfrak{z}(j) := (\tilde{\chi}_8(j), \chi_1(j), \ldots, \chi_n(j))$$

und bei III die Abbildung

$$\mathfrak{t}(j) := (\chi_4(j), \chi_8(j), \chi_1(j), \ldots, \chi_n(j))$$

benutzt.

Satz 3. *Ist f ungerade, so gilt*

$$\sum_{\substack{d/f,\, d<0 \\ d\neq -3}} g(\chi_d, f)\, h(d) \equiv \frac{\varphi(f)}{2} + (1 - \psi_3(f))\, g(\chi_{-3}, f) \bmod 2^{k(f)}.$$

Beweis. Mit $\mathfrak{x}(j) := (\chi_1(j), \ldots, \chi_n(j))$ setzt man wieder

$$S := \sum_{\substack{j=1 \\ \mathfrak{x}(j)=\mathfrak{e}_0}}^{f} j$$

und erhält die Behauptung, indem man S wie in den vorhergehenden Sätzen ausrechnet.

Aus Satz 1 bis 3 ergibt sich als Nebenergebnis sofort die Kongruenz (3), für die somit ein Beweis mit elementaren Mitteln gegeben ist. Auch die Aussagen (1) und (2) sind spezielle Fälle dieser Sätze. Hat man z. B. $f = p \cdot q$, p, q Primzahlen > 3 mit $p \equiv -q \equiv 1 \bmod 4$, so liefert Satz 3

$$h(-pq) + 1 - \left(\frac{p}{q}\right) h(-q) \equiv 0 \bmod 4,$$

also wegen $h(-q) \equiv 1 \bmod 2$

$$h(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right) \bmod 4.$$

Es wäre sehr schön, wenn man aus den Rekursionsformeln der Sätze 1 bis 3 einen geschlossenen Ausdruck mod $2^{k(f)}$ für die Klassenzahl $h(-f)$ berechnen könnte, der dann natürlich ein ganz rationaler Ausdruck in den Charakterwerten sein müßte. Das ist mir zwar in dem Fall gelungen, daß alle Primteiler von f ungerade und $\equiv -1 \bmod 4$ sind, doch ist der dabei entstehende Ausdruck so unübersichtlich, daß ich darauf verzichte, ihn an dieser Stelle aufzuführen. Es seien jetzt noch einige Aussagen als Beispiele angegeben, die sich aus Spezialisierungen der Ergebnisse der Sätze 1 bis 3 ergeben:

Sind die drei Primzahlen $q_\nu > 3$, $1 \leqq \nu \leqq 3$, und $q_\nu \equiv -1 \bmod 4$ für $1 \leqq \nu \leqq 3$, so gilt

$$h(-q_1q_2q_3) \equiv 4 + \left(1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{q_3}{q_1}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{q_3}{q_2}\right)\right)$$
$$+ \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_3}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{q_2}{q_3}\right)\right) \bmod 8.$$

Im Fall, daß $q_\nu > 3$ für $1 \leqq \nu \leqq 3$, aber $q_1 \equiv q_2 \equiv -q_3 \equiv 1 \bmod 4$ ist, erhalten wir

$$h(-q_1q_2q_3) \equiv \left(1-\left(\frac{q_2}{q_1q_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q_1}{q_3}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{q_1}{q_2q_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q_2}{q_3}\right)\right)$$
$$+\left(1-\left(\frac{q_1}{q_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q_2}{q_3}\right)\right) \bmod 8.$$

Es ist vielleicht noch der Beachtung wert, daß Kongruenz III von Satz 2 eigentlich mehr ist als eine Verallgemeinerung der Resultate (1) und (2); wie die folgenden Beispiele zeigen, handelt es sich bei dieser Kongruenz um eine nichttriviale Relation mod $2^{l(f)+1}$ zwischen den Klassenzahlen der verschiedenen imaginär-quadratischen Körper; sie ist keine Rekursionsformel wie die übrigen Kongruenzen.

Ist q eine Primzahl mit $q \equiv -1 \bmod 4$ und $q > 3$, so liefert III aus Satz 2:

$$h(-8q)+(1-\chi_8(q))\,h(-q)+(1+\chi_8(q)) \equiv 3-\frac{q(q-1)}{2} \bmod 8,$$

ist dagegen die Primzahl $q > 3$ aber $q \equiv 1 \bmod 4$, so erhalten wir:

$$h(-8q)+h(-4q)+(1-\chi_8(q)) \equiv -\frac{q(q-1)}{2} \bmod 8.$$

Literaturverzeichnis

[1] *H. Hasse*, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Berlin 1952.

[2] *H. Hasse*, Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

[3] *E. Hecke*, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1954.

[4] *H. Petersson*, Über eine Zerlegung des Kreisteilungspolynoms von Primzahlordnung. Math. Nachr. **14** (1956), 361—375.

Eingegangen 3. März 1964

Über die Darstellung holomorpher Funktionen durch Weierstraß- und Weierstraß-Stieltjes-Integrale

Von *R. J. Nessel* in Aachen

1. Einleitung

Es ist Aufgabe dieser Arbeit, mittels eines komplexen Umkehroperators notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß eine in einem endlichen oder unendlichen Intervall $a < x < b$ definierte Funktion $f(x)$ als Weierstraß- bzw. Weierstraß-Stieltjes-Transformierte dargestellt werden kann.

Dabei verstehen wir unter der Weierstraß-Stieltjes-Transformation einer Funktion $\mu(t)$ die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t) \tag{1.1}$$

für alle x, für die das Integral einen Sinn hat. Entsprechend wird die Weierstraß-Transformation einer Funktion $F(t)$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t)\, dt \tag{1.2}$$

für alle x, für die das Integral konvergiert. Es sei immer vorausgesetzt, daß $\mu(t)$ eine Funktion von beschränkter Variation und $F(t)$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion in jedem endlichen Intervall ist. Weiterhin sei $\mu(t)$ normiert für alle t.

Eine Reihe von Eigenschaften der obigen Transformationen ergeben sich aus ihrer Verwandtschaft mit zweiseitigen Laplace-Transformationen. Wir haben für die Weierstraß-Transformation den Zusammenhang

$$f(-2x) \exp[x^2] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-xt] \cdot \exp\left[-\frac{t^2}{4}\right] F(t)\, dt. \tag{1.3}$$

Rechts steht die zweiseitige Laplace-Transformierte von $\exp\left[-\frac{t^2}{4}\right] F(t)$. Daraus folgt für die Weierstraß-Transformierte $f(x)$: Der Konvergenzbereich ist ein Intervall. Ersetzt man die reelle Variable x durch die komplexe $s = x + iy$, so ist das Konvergenzgebiet ein vertikaler Streifen der komplexen Ebene [6, p. 238]. Mehr noch, jede Weierstraß-Transformierte, die in $a < x < b$ konvergiert, ist in dem Streifen $a < \mathrm{Re}(s) < b$ auch holomorph [6, p. 240]. Entsprechendes ergibt sich für die Weierstraß-Stieltjes-Transformation.

Gilt die Darstellung (1. 1) sogar unter der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,| < \infty \qquad (a < x < b), \tag{1. 4}$$

so folgt

$$|\, f(x+iy)\,| \leqq \frac{\exp\left[\frac{y^2}{4}\right]}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,|,$$

also $f(x+iy) = O\left(\exp\left[\frac{y^2}{4}\right]\right)$, wobei diese Beziehung sogar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) gilt. Denn mit $a < c \leqq x \leqq d < b$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,| = \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right) \exp\left[\frac{xt}{2}\right] \exp\left[-\frac{t^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,|$$

$$\leqq \exp\left[\frac{d^2-c^2}{4}\right]\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-c)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,| + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,|\right\} < \infty$$

gleichmäßig in $c \leqq x \leqq d$. Die so ermittelten Eigenschaften, die von jeder Weierstraß-Stieltjes-Transformierten unter der Nebenbedingung (1. 4) notwendig erfüllt werden, sollen zur Definition der folgenden Funktionenklasse dienen.

Definition. Eine auf einem Intervall (a, b) definierte Funktion $f(x)$ gehört zur Klasse $A(a, b)$, wenn sie analytisch in die komplexe Ebene in einer solchen Weise fortgesetzt werden kann, daß gilt:

1) $f(x+iy)$ ist holomorph in dem Streifen $a < x < b$;

2) $f(x+iy) = O\left(\exp\left[\frac{y^2}{4}\right]\right)$, $|\, y\,| \to \infty$, für jedes x in $a < x < b$ und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b).

Gilt dagegen die Darstellung (1. 2) unter der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, F(t)\,|\, dt < \infty \qquad (a < x < b), \tag{1. 5}$$

so folgt unmittelbar aus dem Satz von Riemann-Lebesgue:

$$f(x+iy) = o\left(\exp\left[\frac{y^2}{4}\right]\right), \quad |\, y\,| \to \infty, \text{ für } a < x < b.$$

Mehr noch, wir haben:

Lemma 1. *Es sei mit $s = x + iy$:*

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-s)^2}{4}\right] F(t)\, dt \qquad (a < x < b),$$

wobei $F(t)$ in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbar ist, und

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \right\|_1 < \infty \qquad (a < x < b).$$

Dann gilt $f(x+iy) = o\left(\exp\left[\frac{y^2}{4}\right]\right)$, $|y| \to \infty$, *gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von* (a, b).

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall $y \to +\infty$ durch, für negative y folgt er entsprechend. Es ist

$$I \equiv \exp\left[-\frac{y^2}{4}\right] f(x+iy) = \exp\left[-\frac{ixy}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \exp\left[\frac{iyt}{2}\right] dt$$

$$= -\exp\left[-\frac{ixy}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \exp\left[\frac{iy}{2}\left(t+\frac{2\pi}{y}\right)\right] dt$$

$$= -\exp\left[-\frac{ixy}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x-(2\pi)/y)^2}{4}\right] F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \exp\left[\frac{iyt}{2}\right] dt.$$

Mithin ist

$$|2I| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) - \exp\left[-\frac{(t-x-(2\pi)/y)^2}{4}\right] F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| dt.$$

Da $\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ ist für jedes x in $a < x < b$, strebt das Integral auf der rechten Seite für $y \to \infty$ gegen Null für jedes x in $a < x < b$. Es bleibt die Gleichmäßigkeit der Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilintervall zu zeigen. Dazu sei $a < c \leqq x \leqq d < b$. Dann ist

$$|2I| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] \left| F(t) - F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| \left| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] - \exp\left[-\frac{\left(t-x-\frac{2\pi}{y}\right)^2}{4}\right] \right| dt = I_1 + I_2.$$

Wie bei der Weierstraß-Stieltjes-Transformation folgt:

$$I_1 \leqq \exp\left[\frac{d^2-c^2}{4}\right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-c)^2}{4}\right] \left| F(t) - F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] \left| F(t) - F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| dt \right\} = \exp\left[\frac{d^2-c^2}{4}\right] \{I_1^1 + I_1^2\},$$

so daß wir beispielsweise für I_1^2 erhalten:

$$I_1^2 \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] F(t) - \exp\left[-\frac{\left(t-d-\frac{2\pi}{y}\right)^2}{4}\right] F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F\left(t-\frac{2\pi}{y}\right) \right| \left| \exp\left[-\frac{\left(t-d-\frac{2\pi}{y}\right)^2}{4}\right] - \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] \right| dt = I_1^{21} + I_1^{22}.$$

Das erste Integral geht gegen Null für $y \to \infty$, da $\exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] F(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ ist, während das zweite umgeschrieben werden kann in

$$I_1^{22} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| \left| \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] - \exp\left[-\frac{\left(t-d+\frac{2\pi}{y}\right)^2}{4}\right] \right| dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t; y)\, dt.$$

Nun gilt $\lim\limits_{y\to\infty} h(t; y) = 0$ für fast alle t, dazu

$$h(t; y) \leqq |F(t)| \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] + |F(t)| \exp\left[-\frac{\left(t-d+\frac{2\pi}{y}\right)^2}{4}\right]$$

$$|F(t)| \exp\left[-\frac{\left(t-d+\frac{2\pi}{y}\right)^2}{4}\right] \leqq \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |F(t)| \exp\left[-\frac{\pi}{y}(t-d)\right]$$

$$\leqq \begin{cases} \exp\left[-\frac{(t-d+k)^2}{4}\right] |F(t)| \exp\left[\frac{k^2}{4}\right] & \text{für } t \leqq d \text{ und alle } y > \frac{2\pi}{k} \equiv y_1 \\ \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |F(t)| & \text{für } t \geqq d. \end{cases}$$

Dabei ist $k > 0$ so gewählt, daß $a < d - k < b$ und $a < c - \frac{k}{2} \equiv c_1$ ist. Es ist daher $h(t; y)$ durch eine Funktion beschränkt, die für $y > y_1$ unabhängig von y ist und in $L_1(-\infty, \infty)$ liegt. Also gilt nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz:

$$\lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t; y)\, dt = 0.$$

Daher folgt: $\lim\limits_{y\to\infty} I_1^2 = 0$, entsprechend $\lim\limits_{y\to\infty} I_1^1 = 0$, also $\lim\limits_{y\to\infty} I_1 = 0$ gleichmäßig in x in $c \leqq x \leqq d$. Weiterhin ergibt sich wie bei der Abschätzung von I_1:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |F(t)| \left| \exp\left[-\frac{\pi}{y}\left(t-x+\frac{\pi}{y}\right)\right] - 1 \right| dt$$

$$\leqq \exp\left[\frac{d^2-c^2}{4}\right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-c)^2}{4}\right] |F(t)| \left| \exp\left[-\frac{\pi}{y}\left(t-x+\frac{\pi}{y}\right)\right] - 1 \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |F(t)| \left| \exp\left[-\frac{\pi}{y}\left(t-x+\frac{\pi}{y}\right)\right] - 1 \right| dt \right\} = \exp\left[\frac{d^2-c^2}{4}\right] \{I_2^1 + I_2^2\}$$

und z. B. für I_2^2:

$$I_2^2 = \left\{ \int_{-\infty}^{c_1} + \int_{c_1}^{d} + \int_{d}^{\infty} \right\} \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |F(t)| \left| \exp\left[-\frac{\pi}{y}\left(t-x+\frac{\pi}{y}\right)\right] - 1 \right| dt$$

$$= I_2^{21} + I_2^{22} + I_2^{23}.$$

Nach Definition von c_1 ist aber $c_1 \leqq c - \frac{\pi}{y} \leqq x - \frac{\pi}{y} \leqq d - \frac{\pi}{y} \leqq d$ für alle $y > y_1$, so daß gilt

$$I_2^{21} \leqq \int_{-\infty}^{c_1} \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |F(t)| \left\{\exp\left[-\frac{\pi}{y}(t-d)\right] - 1\right\} dx.$$

Nun ist aber

$$\lim_{y\to\infty} \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] |F(t)| \left\{\exp\left[-\frac{\pi}{y}(t-d)\right] - 1\right\} = 0$$

fast überall; also folgt aus dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz wieder $\lim_{y\to\infty} I_2^{21} = 0$ und entsprechend $\lim_{y\to\infty} I_2^{23} = 0$ gleichmäßig in $c \leqq x \leqq d$. Um I_2^{22} abzuschätzen, ist für alle $y > y_1$ entweder

$$0 \leqq \exp\left[\frac{\pi}{y}\left(x - t - \frac{\pi}{y}\right)\right] - 1 \leqq \exp\left[\frac{\pi}{y}(d-t)\right] - 1$$

oder

$$0 \leqq 1 - \exp\left[\frac{\pi}{y}\left(x - t - \frac{\pi}{y}\right)\right] \leqq 1 - \exp\left[\frac{\pi}{y}(c_1 - t)\right].$$

In jedem Falle ist also für $c_1 \leqq t \leqq d$ und $y > y_1$:

$$\left|\exp\left[-\frac{\pi}{y}\left(t - x + \frac{\pi}{y}\right)\right] - 1\right| \leqq \exp\left[\frac{\pi}{y}(d-t)\right] - \exp\left[\frac{\pi}{y}(c_1 - t)\right]$$

und daher

$$I_2^{22} \leqq \left[\exp\left[\frac{\pi}{y}(d - c_1)\right] - 1\right] \left\| \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] F(t) \right\|_1.$$

Daraus folgt $\lim_{y\to\infty} I_2^{22} = 0$ gleichmäßig in $c \leqq x \leqq d$, womit alles bewiesen ist.

Wieder wollen wir die Eigenschaften, die von jeder Weierstraß-Transformierten unter der Bedingung (1. 5) notwendig erfüllt werden, zur Definition einer Funktionenklasse benutzen.

Definition. Eine auf einem Intervall (a, b) definierte Funktion $f(x)$ gehört zur Klasse $B(a, b)$, wenn sie analytisch in die komplexe Ebene in einer solchen Weise fortgesetzt werden kann, daß gilt

1) $f(x + iy)$ ist holomorph in dem Streifen $a < x < b$;

2) $f(x + iy) = o\left(\exp\left[\frac{y^2}{4}\right]\right)$, $|y| \to \infty$, für jedes x in $a < x < b$ und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b).

Die Funktionen, für die eine Darstellung durch Weierstraß- bzw. Weierstraß-Stieltjes-Integrale bewiesen werden soll, werden solche aus den Klassen $B(a, b)$ bzw. $A(a, b)$ sein. Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen wird dabei das folgende Ergebnis sein.

Lemma 2. *Falls $F(t)$ Lebesgue-integrierbar in jedem endlichen Intervall ist und das Integral*

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-s)^2}{4}\right] F(t)\, dt$$

in einem Streifen $a < \mathrm{Re}(s) < b$ *konvergiert, gilt fast überall:*

$$F(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}\, i} \int_{x-iT}^{x+iT} \left(1 - \frac{|y|}{T}\right) \exp\left[\frac{(s-t)^2}{4}\right] f(s)\, ds \qquad (a < x < b).$$

Beweis. Mit $s = x + iy$; $\zeta = \xi + i\eta$ und $s = -2\zeta$ gilt in $-\frac{b}{2} < \xi < -\frac{a}{2}$

$$\sqrt{4\pi}\, \exp[\zeta^2]\, f(-2\zeta) = h(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\zeta t]\, H(t)\, dt,$$

wobei $H(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{4}\right] F(t)$ gesetzt wurde. Die Funktion $h(\zeta)$ ist mithin die in $-\frac{b}{2} < \mathrm{Re}(\zeta) < -\frac{a}{2}$ konvergente zweiseitige Laplace-Transformierte der Funktion $H(t)$, die mit $F(t)$ ebenfalls in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbar ist. Also folgt aus dem entsprechenden $(C, 1)$-Umkehrsatz für die zweiseitige Laplace-Transformation [6, p. 244]: Für fast alle t gilt:

$$H(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - iT/2}^{\xi + iT/2} \left(1 - \frac{|\eta|}{\frac{T}{2}}\right) \exp[\zeta t]\, h(\zeta)\, d\zeta \qquad \left(-\frac{b}{2} < \xi < -\frac{a}{2}\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4\pi i} \int_{x-iT}^{x+iT} \left(1 - \frac{|y|}{T}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} st\right] h\left(-\frac{1}{2} s\right) ds \qquad (a < x < b),$$

woraus die Behauptung des Lemmas folgt.

Der in Lemma 2 aufgedeckte Zusammenhang stellt nun die Frage, ob es notwendige und hinreichende Bedingungen an den komplexen Umkehroperator

$$(1.6) \qquad F_T(t; x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}\, i} \int_{x-iT}^{x+iT} \left(1 - \frac{|y|}{T}\right) \exp\left[\frac{(s-t)^2}{4}\right] f(s)\, ds \qquad (a < x < b)$$

gibt, die uns die Existenz einer Funktion $F(t)$ mit gewissen Eigenschaften sichern, deren Weierstraß- bzw. Weierstraß-Stieltjes-Transformierte gleich der vorgegebenen Funktion $f(x)$ ist, d. h., ob aus geeigneten Bedingungen an den Operator (1. 6) die Darstellung von $f(x)$ durch Weierstraß- bzw. Weierstraß-Stieltjes-Integrale gefolgert werden kann.

Analoga zu dem Operator (1. 6) wurden schon des öfteren in der Literatur benutzt, um entsprechende Aussagen im Falle der Fourier-Transformation [z. B. [4]] und der Laplace-Transformation [1] zu geben. Es soll noch erwähnt werden, daß die hier gewonnenen Darstellungssätze verschieden von denen in [3] sind, da dort ein anderer Umkehroperator benutzt wird.

Im folgenden Abschnitt wird nun ein Satz über die Darstellung durch Weierstraß-Stieltjes-Integrale bewiesen, während die Abschnitte 3 und 4 die entsprechenden Sätze über die Darstellung durch Weierstraß-Integrale behandeln.

2. Darstellung durch Weierstraß-Stieltjes-Integrale

Die Frage, wann eine Funktion, die auf einem Intervall (a, b) definiert ist, als ein Weierstraß-Stieltjes-Integral dargestellt werden kann, wird durch folgenden Satz beantwortet.

Satz 1. *Die Bedingungen*

1) $f(x) \in A(a, b)$,

2) $\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t; x) \right\|_1 = O(1)$

für alle $T > 0$ *und jedes feste* x *in* $a < x < b$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß $f(x)$ *dargestellt werden kann durch*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t), \tag{2. 1}$$

wobei $\mu(t)$ *in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation und*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\, | < \infty \tag{2. 2}$$

für jedes x *in* $a < x < b$ *ist.*

Bemerkung. Die Bedingung 2) bedeutet, daß für jedes feste x aus $a < x < b$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, F_T(t; x)\, |\, dt$$

bezüglich $T > 0$ beschränkt ist, wobei die Schranke natürlich von dem jeweiligen Parameterwert x abhängen kann.

Beweis. Notwendigkeit. Wir nehmen an, daß die Funktion $f(x)$ die Darstellung (2. 1) hat. Dann folgt aus (2. 2), daß das Integral in (2. 1) in $a < x < b$ konvergiert, und weiterhin, daß $f(x)$ zur Klasse $A(a, b)$ gehört. Wir bilden nun mit beliebigem x in $a < x < b$ und $s = x + iy$

$$F_T(t; x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(u) \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|y|}{T}\right) \exp\left[\frac{(x+iy-t)^2 - (x+iy-u)^2}{4}\right] dy.$$

Dabei war die Vertauschung der Integrationsordnung nach Fubini-Saks [6. p. 26] erlaubt. Daher ist

$$F_T(t; x) = \frac{\exp\left[\frac{(t-x)^2}{4}\right]}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4}\right] d\mu(u) \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|y|}{T}\right) \exp\left[i\,\frac{u-t}{2}\,y\right] dy.$$

Mit

$$\int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|y|}{T}\right) \exp[iuy]\, dy = \frac{4}{T}\, \frac{\sin^2 \frac{T}{2} u}{u^2}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \pi \tag{2. 3}$$

folgt:

$$F_T(t; x) = \frac{\exp\left[\frac{(t-x)^2}{4}\right]}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4}\right] \frac{\sin^2 \frac{T(u-t)}{4}}{\left(\frac{u-t}{2}\right)^2}\, d\mu(u),$$

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t; x) \right\|_1 \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(u)\, |.$$

Aus den Eigenschaften an $\mu(u)$ folgt hiermit die Notwendigkeit der Bedingung 2). Die zuletzt vorgenommene Vertauschung der Integrationsordnung war nach Fubini-Saks erlaubt.

Hinlänglichkeit. Da $f(x) \in A(a, b)$ ist, so ist die Funktion $F_T(t; x)$ für jedes x in $a < x < b$, für alle endlichen $T > 0$ und alle reellen t wohldefiniert. Wir setzen

$$\mu_T(t; x) = \int_0^t F_T(u; x)\, du$$

und betrachten ein beliebiges endliches Intervall $[\alpha, \beta]$ und einen beliebigen, aber dann festgehaltenen Punkt $x_0 \in (a, b)$. Da nach Voraussetzung 2)

$$\int_\alpha^\beta |\, d\mu_T(t; x_0)\,| \leqq \max_{\alpha \leqq t \leqq \beta} \left\{\exp\left[\frac{(t - x_0)^2}{4}\right]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t - x_0)^2}{4}\right] |\, F_T(t; x_0)\,|\, dt < \infty$$

gleichmäßig für $T > 0$ beschränkt ist, bildet die Menge $\{\mu_T(t; x_0)\}$ auf $[\alpha, \beta]$ eine Klasse von Funktionen, die bezüglich $T > 0$ von gleichmäßig beschränkter Variation sind. Außerdem haben wir

$$|\, \mu_T(\alpha; x_0)\,| \leqq \max_{0 \leqq t \leqq \alpha} \left\{\exp\left[\frac{(t - x_0)^2}{4}\right]\right\} \left\| \exp\left[-\frac{(t - x_0)^2}{4}\right] F_T(t; x_0) \right\|_1 < \infty$$

gleichmäßig für $T > 0$. Entsprechendes gilt für $|\, \mu_T(\beta; x_0)\,|$. Daher folgt aus dem Satz von Helly [6, p. 29], daß eine Teilfolge $\{T_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} T_k(x_0) = \infty$ und eine Funktion $\mu(t; x_0)$ von beschränkter Variation auf $[\alpha, \beta]$ so existieren, daß

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{T_k(x_0)}(t; x_0) = \mu(t; x_0) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

gilt. Da die Funktionen $\mu_T(t; x_0)$ für alle reellen t definiert sind, können wir es nach dem in [6, p. 30] angegebenen Verfahren erreichen, daß eine Folge

$$\{T_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ mit } \lim_{k \to \infty} T_k(x_0) = \infty$$

so existiert, daß

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{T_k(x_0)}(t; x_0) = \mu(t; x_0)$$

nun für alle reellen t gilt. Dabei ist jetzt $\mu(t; x_0)$ für alle t definiert und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation. Weiterhin folgt für jedes $h \in C[\alpha, \beta]$, α, β beliebig reell, aus dem Satz von Helly-Bray [6, p. 31]

$$\begin{aligned} (2.4) \qquad & \lim_{k \to \infty} \int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t - x)^2}{4}\right] h(t)\, d\mu_{T_k(x_0)}(t; x_0) \\ & = \int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t - x)^2}{4}\right] h(t)\, d\mu(t; x_0) \qquad (a < x < b). \end{aligned}$$

Dazu ergibt sich als Folgerung aus dem Satz von Helly-Bray [6, p. 32]

$$\int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t - x_0)^2}{4}\right] |\, d\mu(t; x_0\,| \leqq \varliminf_{k \to \infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t - x_0)^2}{4}\right] F_{T_k(x_0)}(t; x_0) \right\|_1$$

mithin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] |\, d\mu(t;x_0)\,| \leqq \lim_{k\to\infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F_{T_k(x_0)}(t;x_0) \right\|_1 .$$

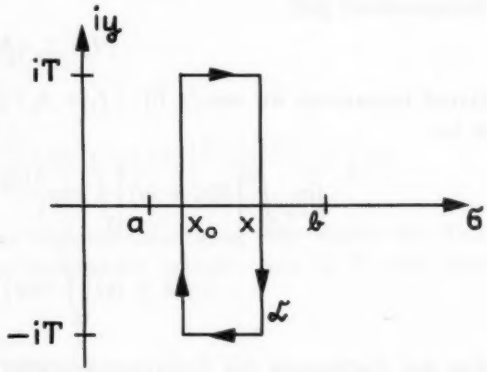
Wir wollen nun zeigen, daß für die Funktion $\mu(t) \equiv \mu(t;x_0)$ die Relation (2. 2) für alle x in $a<x<b$ erfüllt ist. Zunächst folgt nach Definition mit $T_k \equiv T_k(x_0)$

$$(2.5) \qquad \mu(t) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t F_{T_k}(u;x_0)\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lim_{k\to\infty} \int_{-T_k}^{T_k} \left(1 - \frac{|y|}{T_k}\right) f(x_0+iy) \left\{ \int_0^t \exp\left[\frac{(x_0+iy-u)^2}{4}\right] du \right\} dy .$$

Dabei war die Vertauschung der Integrationsordnung wegen der Endlichkeit der Intervalle und der Stetigkeit des Integranden erlaubt. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(s) \int_0^t \exp\left[\frac{(s-u)^2}{4}\right] du .$$



Diese ist holomorph in dem Streifen

$$a < \mathrm{Re}(s) < b ,$$

da $f \in A(a,b)$ ist. Daher erhalten wir aus dem Cauchyschen Integralsatz für z. B. $x > x_0$ und $a < x_0 \leqq \sigma \leqq x < b$

$$\int_{\mathcal{L}} f(s) \left\{ \int_0^t \exp\left[\frac{(s-u)^2}{4}\right] du \right\} ds = 0$$

oder

$$(2.6) \qquad 0 = \left\{ \int_{x_0-iT}^{x_0+iT} + \int_{x_0+iT}^{x+iT} + \int_{x+iT}^{x-iT} + \int_{x-iT}^{x_0-iT} \right\} f(s) \left(\int_0^t \exp\left[\frac{(s-u)^2}{4}\right] du \right) ds$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

Nun ergibt sich z. B. für I_2:

$$|\, I_2 \,| \leqq M(x_0, x) \int_{x_0}^{x} \left| \int_0^t \exp\left[\frac{(\sigma-u)^2}{4}\right] \exp\left[-i\frac{T}{2}u\right] du \right| d\sigma .$$

Dabei wurde gesetzt $\left| f(\sigma+iT) \exp\left[-\frac{T^2}{4}\right] \right| \leqq M(x_0, x)$ gleichmäßig in $x_0 \leqq \sigma \leqq x$ und T, da $f \in A(a,b)$ ist. Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue gilt aber:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^t \exp\left[\frac{(\sigma-u)^2}{4}\right] \exp\left[-\frac{iu}{2}T\right] du = 0$$

für jedes σ in $x_0 \leqq \sigma \leqq x$, da $\exp\left[\frac{(\sigma-u)^2}{4}\right] \in L_1(0,t)$ ist für jedes feste reelle t.

Außerdem ist

$$\left|\int_0^t \exp\left[\frac{(\sigma-u)^2}{4}\right]\exp\left[-\frac{iu}{2}T\right]du\right| \leqq \int_0^t \exp\left[\frac{(\sigma-u)^2}{4}\right]du \in L_1(x_0, x).$$

Daraus folgt aus dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{T\to\infty}\int_{x_0}^{x}\left|\int_0^t \exp\left[\frac{(\sigma-u)^2}{4}\right]\exp\left[-\frac{iu}{2}T\right]du\right|d\sigma = 0.$$

Also

$$|I_2| \leqq \varepsilon M(x_0, x) \text{ für alle } T > T_0(\varepsilon, x_0, x, t).$$

Entsprechend gilt:

$$|I_4| \leqq \varepsilon M(x_0, x).$$

Damit bekommen wir aus (2. 6): $|I_1 + I_3| \leqq 2\varepsilon M(x_0, x)$ für alle genügend großen T, d. h.:

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left[f(x_0+iy)\left\{\int_0^t \exp\left[\frac{(x_0+iy-u)^2}{4}\right]du\right\}\right.$$
$$\left.-f(x+iy)\left\{\int_0^t \exp\left[\frac{(x+iy-u)^2}{4}\right]du\right\}\right]dy = 0.$$

Aus der Permanenz des Cesàrosummierungsverfahrens ergibt sich schließlich für alle $a < x < b$ und alle reellen t:

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|y|}{T}\right)\left[f(x_0+iy)\left\{\int_0^t \exp\frac{(x_0+iy-u)^2}{4}\right]du\right\}\right.$$
$$\left.-f(x+iy)\left\{\int_0^t \exp\left[\frac{(x+iy-u)^2}{4}\right]du\right\}\right]dy = 0.$$

Da der erste Ausdruck nach (2. 5) für die Teilfolge T_k konvergiert, gilt nunmehr

$$\mu(t) = \lim_{k\to\infty}\int_0^t F_{T_k}(u; x)\,du \qquad (a < x < b),$$

d. h. es existiert eine Funktion $\mu(t)$ und eine Folge $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, so daß $\mu(t) = \lim_{k\to\infty}\mu_{T_k}(t; x)$ für alle x in $a<x<b$ folgt. Damit gelangen wir für beliebige reelle α, β und $h \in C[\alpha, \beta]$ zu:

$$(2.\,7)\quad \lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]h(t)\,d\mu_{T_k}(t; x) = \int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]h(t)\,d\mu(t)$$

und

$$\int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]|d\mu(t)| \leqq \lim_{k\to\infty}\left\|\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F_{T_k}(t; x)\right\|_1;$$

also gilt auch

$$(2.8)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(t)\,| \leqq \lim_{k\to\infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_{T_k}(t;x) \right\|_1 \quad (a<x<b).$$

Wir wählen nun die Funktion $G(t) \in C[\alpha, \beta]$ so, daß $G(\alpha) = G(\beta) = 0$ ist. Weiterhin setzen wir sie durch Null auf $(-\infty, \infty)$ stetig fort und bilden die Fouriertransformierte $g(y)$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-iyu]\, G(u)\, du.$$

Damit erhalten wir

$$(2.9)\quad \int_{\alpha}^{\beta} G(t) \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t;x)\, dt$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\sqrt{2}} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] g\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Die hier vorgenommene Vertauschung der Integrationsordnung war wegen der Endlichkeit der Intervalle und Stetigkeit des Integranden erlaubt. Aus (2. 7) folgt dann

$$(2.10)\quad \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] G(t)\, d\mu(t)$$

$$= \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\sqrt{2}} \lim_{k\to\infty} \int_{-T_k}^{T_k} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_k}\right) f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] g\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Wir setzen jetzt speziell $\alpha = -2\omega$; $\beta = 2\omega$ mit $\omega > 0$ beliebig, aber fest und

$$(2.11)\qquad G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{|t|}{2\omega}\right) \exp\left[i\frac{y}{2}t\right] & -2\omega \leqq t \leqq 2\omega \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist y eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt nach (2. 3)

$$g\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{4}{\pi\omega} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\omega(y-\tau)}{(y-\tau)^2},$$

so daß aus (2. 10) folgt:

$$(2.12)\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2\omega}^{2\omega} \left(1 - \frac{|t|}{2\omega}\right) \exp\left[i\frac{yt}{2}\right] \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t)$$

$$= \frac{4 \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\pi\omega\sqrt{2}} \lim_{k\to\infty} \int_{-T_k}^{T_k} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_k}\right) f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(y-\tau)}{(y-\tau)^2}\, d\tau.$$

Nun ist, da $f \in A(a, b)$ ist,

$$(2.13)\quad \left| f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right]\right| = \exp\left[\frac{x^2}{4}\right] \left| f(x+i\tau) \exp\left[-\frac{\tau^2}{4}\right]\right| = O(1).$$

Also existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(y-\tau)}{(y-\tau)^2}\, d\tau,$$

es ist Cesàro-summierbar, und zwar zur gleichen Summe. Mithin erhalten wir aus (2.12)

$$(2.14)\quad \int_{-2\omega}^{2\omega} \left(1 - \frac{|t|}{2\omega}\right) \exp\left[\frac{iyt}{2}\right] \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t)$$

$$= \frac{4 \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\omega\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(y-\tau)}{(y-\tau)^2}\, d\tau.$$

Da das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{iyt}{2}\right] \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t)$ nach (2.8) absolut konvergiert, existiert auch das Cesàromittel und beide sind gleich. Also ergibt sich für $\omega \to \infty$ aus (2.14)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{iyt}{2}\right] \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t)$$

$$= 2\sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] \lim_{\omega\to\infty} \frac{2}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(y-\tau)}{(y-\tau)^2}\, d\tau.$$

Da $f \in A(a, b)$ ist, so ist $f(x+i\tau) \exp\left[\frac{x+i\tau)^2}{4}\right]$ stetig und beschränkt für alle τ. Daher folgt aus dem Satz von Fejér für alle reellen y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{iyt}{2}\right] \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t) = \sqrt{4\pi} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] f(x+iy) \exp\left[\frac{(x+iy)^2}{4}\right],$$

so daß wir für jedes x in $a < x < b$ und alle reellen y

$$f(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x-iy)^2}{4}\right] d\mu(t)$$

bekommen, was zu beweisen war.

Als ein einfaches Beispiel einer Funktion, die die Bedingungen von Satz 1 erfüllt, betrachten wir die Funktion $f(x) \equiv 1$ in $-\infty < x < \infty$, für die die Darstellung gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] dt.$$

Also ist in diesem Fall die Funktion $\mu(t) \equiv t$, für die natürlich die Bedingung (2.2) erfüllt ist.

Bemerkung. Nach dem üblichen Verfahren kann die Eindeutigkeitsaussage für die zweiseitige Laplace-Stieltjes-Transformation [6, p. 243] zu einer für die Weierstraß-Stieltjes-Transformation übertragen werden, so daß die Darstellung (2. 1) unter der Bedingung (2. 2) eindeutig ist.

3. Zur Darstellung durch Weierstraß-Integrale. Der Fall $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leqq \infty$

Für die Darstellung einer Funktion $f(x) \in B(a, b)$ durch ein Weierstraß-Integral gilt der folgende Satz:

Satz 2. *Die Bedingungen*

1) $f(x) \in B(a, b)$,

2) $\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t; x) \right\|_p = O(1)$, $1 < p \leqq \infty$, *für alle* $T > 0$ *und jedes feste* x *in* $a < x < b$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß $f(x)$ *dargestellt werden kann durch*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t)\, dt, \tag{3. 1}$$

wobei $F(t)$ *eine in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbare Funktion ist mit*

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \right\|_p < \infty, \qquad 1 < p \leqq \infty, \tag{3. 2}$$

für jedes x *in* $a < x < b$.

Beweis. Notwendigkeit. Zunächst folgt aus (3. 2), daß das Integral in (3. 1) konvergiert. Denn mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir für jedes x in $a < x < b$ und für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |F(t)|\, dt \\
&\leqq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-d)^2 p}{4}\right] |F(t)|^p\, dt \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{d^2 - x^2 - 2t(d-x)}{4} q\right] dt \right\}^{1/q} \\
&\leqq \left\| \exp\left[-\frac{(t-d)^2}{4}\right] F(t) \right\|_p \exp\left[\frac{d^2 - x^2}{4}\right] \left\{\frac{2}{q(d-x)}\right\}^{1/q} < \infty,
\end{aligned}$$

falls man $a < x < d < b$ wählt. Entsprechend bekommen wir mit $a < c < x < b$

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |F(t)|\, dt \leqq \left\| \exp\left[-\frac{(t-c)^2}{4}\right] F(t) \right\|_p \exp\left[\frac{c^2 - x^2}{4}\right] \left\{\frac{2}{q(x-c)}\right\}^{1/q} < \infty.$$

Somit folgt aus (3. 2), daß dann auch für jedes x in $a < x < b$ gilt:

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \right\|_1 < \infty. \tag{3. 3}$$

Wir nehmen nun an, $f(x)$ habe die Darstellung (3. 1). Dann folgt aus der Bedingung (3. 2), daß das Integral in (3. 1) in $a < x < b$ absolut konvergiert, und damit nach Lemma 1, daß die Funktion $f(x)$ zur Klasse $B(a, b)$ gehört.

Wie in dem Beweis von Satz 1 ergibt sich:

$$F_T(t;x) = \frac{1}{4\pi T} \exp\left[\frac{(t-x)^2}{4}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4}\right] \frac{\sin^2 \frac{T}{4}(u-t)}{\left(\frac{u-t}{4}\right)^2} F(u)\, du.$$

Im Falle $1 < p < \infty$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] | F_T(t;x) |$$

$$\leqq \left\{ \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4} p\right] | F(u) |^p \left[\frac{\sin \frac{T}{4}(u-t)}{\frac{u-t}{4}}\right]^2 du \right\}^{1/p}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{T}{4}(u-t)}{\frac{u-t}{4}}\right]^2 du \right\}^{1/q}.$$

Mit (2. 3) erhalten wir dann:

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t;x) \right\|_p \leqq \left\| \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4}\right] F(u) \right\|_p < \infty.$$

Aus der Bedingung (3. 2) an $F(t)$ folgt hiermit die Notwendigkeit der Bedingung 2 im Falle $1 < p < \infty$. Die zuletzt vorgenommene Vertauschung der Integrationsordnung war nach Fubini erlaubt. Ist $p = \infty$, so ergibt sich aus (3. 2) unmittelbar:

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t;x) \right\|_\infty \leqq \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \right\|_\infty.$$

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingungen von Satz 2 bewiesen.

Hinlänglichkeit. Da $f(x) \in B(a, b)$ ist, so ist die Funktion $F_T(t;x)$ für jedes x in $a < x < b$, für alle endlichen $T > 0$ und alle reellen t wohldefiniert. Aus der Bedingung 2) folgt mit dem Satz über die schwache* Kompaktheit [6, p. 33], daß für einen beliebigen, dann aber festgehaltenen Punkt $x_0 \in (a, b)$ eine Folge von reellen Zahlen $T_k(x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, monoton wachsend gegen Unendlich, und eine Funktion $F(t; x_0)$ mit $\exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F(t; x_0) \in L_p(-\infty, \infty)$ existieren, so daß für alle $G(t) \in L_q(-\infty, \infty)$, $1 < p \leqq \infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F_{T_k(x_0)}(t; x_0)\, dt \tag{3. 4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F(t; x_0)\, dt.$$

Weiterhin haben wir

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F(t; x_0) \right\|_p \leqq \lim_{k\to\infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F_{T_k(x_0)}(t; x_0) \right\|_p. \tag{3. 5}$$

Ist $[\alpha, \beta]$ ein beliebiges Intervall, so erhalten wir

$$\int_\alpha^\beta |F(t; x_0)|\, dt \leqq \left\{\int_\alpha^\beta \exp\left[\frac{(t-x_0)^2}{4} q\right] dt\right\}^{1/q} \left\{\int_\alpha^\beta \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4} p\right] |F(t; x_0)|^p\, dt\right\}^{1/p} < \infty$$

d. h.: Die Funktion $F(t; x_0)$ ist in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbar.

Wir wählen nun $G(t)$ als eine in $(-\infty, \infty)$ Lebesgue-integrierbare und beschränkte Funktion. Dann ist $G(t) \in L_q(-\infty, \infty)$ für alle $1 \leqq q \leqq \infty$. Bezeichnen wir wieder mit $g(\tau)$ die Fouriertransformierte von $G(t)$, so gelangen wir wie im Beweis von Satz 1 zu:

$$(3.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] G(t)\, F_T(t; x_0)\, dt$$
$$= \frac{\exp\left[-\frac{x_0^2}{4}\right]}{\sqrt{2}} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0 + i\tau)^2}{4}\right] \cdot g\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Aus (3. 4) folgt dann für jedes beschränkte $G(t) \in L_1(-\infty, \infty)$:

$$(3.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] G(t)\, F(t; x_0)\, dt$$
$$= \frac{\exp\left[-\frac{x_0^2}{4}\right]}{\sqrt{2}} \lim_{k\to\infty} \int_{-T_k(x_0)}^{T_k(x_0)} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_k(x_0)}\right) f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0 + i\tau)^2}{4}\right] g\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Das nächste Ziel ist, eine explizite Darstellung für die Funktion $F(t; x_0)$ zu erhalten. Dazu bedienen wir uns, umgekehrt wie in (2. 11), der speziellen Funktion:

$$G(u) = \frac{2}{\pi\omega} \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(u-t)}{(u-t)^2}.$$

Dann ist:

$$g\left(\frac{\tau}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{|\tau|}{2\omega}\right) \exp\left[-i\frac{\tau}{2} t\right] & (-2\omega \leqq \tau \leqq 2\omega) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gehen wir damit in Formel (3. 6) ein, so erhalten wir für $T > 2\omega$:

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x_0)^2}{4}\right] F_T(u; x_0) \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(u-t)}{(u-t)^2}\, du$$
$$= \frac{\exp\left[-\frac{x_0^2}{4}\right]}{\sqrt{2}\,\sqrt{2\pi}} \int_{-2\omega}^{2\omega} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0 + i\tau)^2}{4}\right] \left(1 - \frac{|\tau|}{2\omega}\right) \exp\left[-i\frac{\tau}{2} t\right] d\tau.$$

Daraus folgt für $T_k(x_0) \to \infty$ nach (3. 4) und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz:

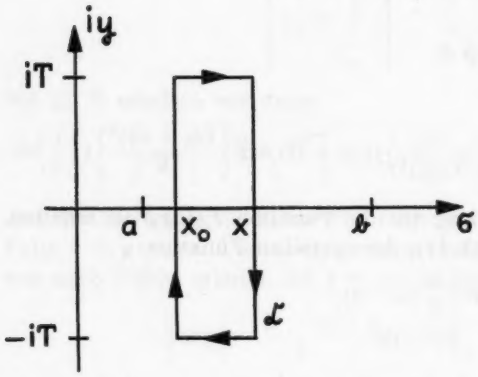
$$\frac{2}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u-x_0)^2}{4}\right] F(u; x_0) \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}(u-t)}{(u-t)^2}\, du$$
$$= \frac{\exp\left[-\frac{x_0^2}{4}\right]}{\sqrt{4\pi}} \int_{-2\omega}^{2\omega} \left(1 - \frac{|\tau|}{2\omega}\right) f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0 + i\tau)^2 - 2i\tau t}{4}\right] d\tau.$$

Nun wissen wir, daß $\exp\left[-\frac{(u-x_0)^2}{4}\right] F(u; x_0) \in L_p(-\infty, \infty)$ liegt. Also folgt aus dem Satz von Fejér [2, p. 100—2; 114] für $\omega \to \infty$ und fast alle t:

$$(3.8) \quad \exp\left[-\frac{(t-x_0)^2}{4}\right] F(t; x_0)$$
$$= \frac{\exp\left[-\frac{x_0^2}{4}\right]}{\sqrt{4\pi}} \lim_{\omega\to\infty} \int_{-2\omega}^{2\omega} \left(1 - \frac{|\tau|}{2\omega}\right) f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0+i\tau)^2 - 2i\tau t}{4}\right] d\tau.$$

Die Konvergenz erfolgt dabei nicht nur punktweise fast überall, sondern auch in der Metrik von $L_p(-\infty, \infty)$. Für $F(t; x_0)$ erhalten wir mithin für fast alle t die Darstellung:

$$(3.9) \quad F(t; x_0) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} \left(1 - \frac{|\tau|}{\omega}\right) f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0+i\tau-t)^2}{4}\right] d\tau.$$



Mit Hilfe von (3. 9) wollen wir zeigen, daß $F(t; x_0)$ unabhängig von $x_0 \in (a, b)$ ist. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(s) \cdot \exp\left[\frac{(s-t)^2}{4}\right].$$

Diese ist holomorph in dem Streifen $a < \mathrm{Re}(s) < b$, da $f \in B(a, b)$ ist. Daher folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für z. B. $x > x_0$ und $a < x_0 \leqq \sigma \leqq x < b$:

$$\int_{\mathcal{L}} f(s) \exp\left[\frac{(s-t)^2}{4}\right] ds = 0$$

oder

$$(3.10) \quad 0 = \left\{ \int_{x_0-iT}^{x_0+iT} + \int_{x_0+iT}^{x+iT} + \int_{x+iT}^{x-iT} + \int_{x-iT}^{x_0-iT} \right\} f(s) \exp\left[\frac{(s-t)^2}{4}\right] ds = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Nun ergibt sich z. B. für I_2:

$$|I_2| \leqq \int_{x_0}^{x} \exp\left[-\frac{T^2}{4}\right] |f(\sigma + iT)| \exp\left[\frac{(\sigma-t)^2}{4}\right] d\sigma \leqq M_1(x_0; x; T) \int_{x_0}^{x} \exp\left[\frac{(\sigma-t)^2}{4}\right] d\sigma.$$

Hier konnten wir, da $f \in B(a, b)$ liegt, eine Funktion $M_1(x_0; x; T)$ so angeben, daß gleichmäßig in $x_0 \leqq \sigma \leqq x$: $\exp\left[-\frac{T^2}{4}\right] |f(\sigma + iT)| \leqq M_1(x_0; x; T)$ und $\lim_{T\to\infty} M_1(x_0; x; T) = 0$ gilt.

Da wir für I_4 wieder eine entsprechende Abschätzung durchführen können, erhalten wir aus (3. 10) für jedes reelle t:

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left[f(x_0 + i\tau) \exp\left[\frac{(x_0+i\tau-t)^2}{4}\right] - f(x + i\tau) \exp\left[\frac{(x+i\tau-t)^2}{4}\right] \right] d\tau = 0.$$

Aus der Permanenz des Cesàrosummierungsverfahrens folgt schließlich für alle $a<x<b$ und alle reellen t:

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\left[f(x_0+i\tau)\exp\left[\frac{(x_0+i\tau-t)^2}{4}\right]-f(x+i\tau)\exp\left[\frac{(x+i\tau-t)^2}{4}\right]\right]d\tau=0.$$

Da der erste Ausdruck nach (3. 9) für $T\to\infty$ konvergiert, gilt nunmehr für fast alle t:

$$(3.\,11)\qquad F(t;x_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)f(x+i\tau)\exp\left[\frac{(x+i\tau-t)^2}{4}\right]d\tau\qquad(a<x<b),$$

d. h.: führen wir unsere Überlegungen statt bei x_0 an einem beliebigen anderen Punkt x durch, so gelangen wir zu einer Funktion $F(t;x)$ und einer Folge von reellen Zahlen $T_k(x)$, so daß (3. 4) und (3. 5) nun am Punkte x erfüllt sind. Ferner besagt (3. 11), daß dann $F(t;x_0)=F(t;x)$ für fast alle t ist. Setzen wir also $F(t;x_0)\equiv F(t)$, so gilt für jedes x in $a<x<b$:

$$(3.\,12)\qquad \left\|\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F(t)\right\|_p<\infty\qquad(1<p\leqq\infty).$$

Nach dem zu Beginn des Notwendigkeitsbeweises gebrachten Argument folgt jetzt aus (3. 12), daß auch $\left\|\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F(t)\right\|_1<\infty$ ist für jedes x in $a<x<b$.

Wir kehren nun zurück zur Gleichung (3. 7), die, am beliebigen Punkt $x\in(a,b)$ aufgeschrieben, für jedes beschränkte $G(t)\in L_1(-\infty,\infty)$ ergibt:

$$(3.\,13)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]G(t)\,F(t)\,dt$$
$$=\frac{\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\sqrt{2}}\lim_{k\to\infty}\int_{-T_k(x)}^{T_k(x)}\left(1-\frac{|\tau|}{T_k(x)}\right)f(x+i\tau)\exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right]g\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau.$$

Nehmen wir wieder für $G(t)$ die spezielle Funktion (2. 11), so erhalten wir, entsprechend zu (2. 12), aus (3. 13)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\omega}^{2\omega}\left(1-\frac{|t|}{2\omega}\right)F(t)\exp\left[-\frac{(t-x)^2-2iyt}{4}\right]dt$$
$$=\frac{4\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\sqrt{2}\pi\omega}\lim_{k\to\infty}\int_{-T_k(x)}^{T_k(x)}\left(1-\frac{|\tau|}{T_k(x)}\right)f(x+i\tau)\exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right]\frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega(y-\tau)}{(y-\tau)^2}d\tau.$$

Da aus $f\in B(a,b)$ folgt $f\in A(a,b)$, bekommen wir wie bei (2. 13) und (2. 14):

$$(3.\,14)\qquad \int_{-2\omega}^{2\omega}\left(1-\frac{|t|}{2\omega}\right)\exp\left[-\frac{(t-x)^2-2iyt}{4}\right]F(t)\,dt$$
$$=\frac{4\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]}{\omega\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+i\tau)\exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right]\frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega(y-\tau)}{(y-\tau)^2}d\tau.$$

Nun konvergiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2-2iyt}{4}\right] F(t)\,dt$ absolut, so daß sich aus der Permanenz des Cesàromittels aus (3. 14) für $\omega \to \infty$ ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2-2iyt}{4}\right] F(t)\,dt$$

$$= 2\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] \lim_{\omega\to\infty} \frac{2}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+i\tau)\exp\left[\frac{(x+i\tau)^2}{4}\right] \frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega(y-\tau)}{(y-\tau)^2}\,d\tau.$$

Schließlich führt eine Anwendung des Satzes von Fejér zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2-2iyt}{4}\right] F(t)\,dt = \sqrt{4\pi}\exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] f(x+iy)\exp\left[\frac{(x+iy)^2}{4}\right],$$

so daß wir für jedes x in $a < x < b$ und alle reellen y

$$f(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x-iy)^2}{4}\right] F(t)\,dt$$

bekommen, was zu beweisen war.

Bemerkung. Aus Lemma 2 folgt sofort, daß die Darstellung (3. 1) unter der Bedingung (3. 2) eindeutig ist. Dasselbe gilt natürlich auch für die Aussage von Satz 3.

4. Zur Darstellung durch Weierstraß-Integrale. Der Fall $L_1(-\infty, \infty)$

In diesem Abschnitt wollen wir den verbleibenden Fall $p = 1$ behandeln. Hier erhalten wir das folgende Ergebnis.

Satz 3. *Die Bedingungen*

1) $f(x) \in B(a, b)$,

2) $\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F_T(t; x) \right\|_1 = O(1)$ *für alle* $T > 0$ *und jedes feste* x *in* $a < x < b$,

3) $\lim_{T\to\infty;\, R\to\infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] \{F_T(t; x) - F_R(t; x)\} \right\|_1 = 0$ *für jedes* $x \in (a, b)$

sind notwendig und hinreichend dafür, daß $f(x)$ *dargestellt werden kann durch*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t)\,dt, \tag{4. 1}$$

wobei $F(t)$ *eine in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbare Funktion ist mit*

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t) \right\|_1 < \infty \tag{4. 2}$$

für jedes x *in* $a < x < b$.

Beweis. Notwendigkeit. Nehmen wir an, die Funktion $f(x)$ habe die Darstellung (4. 1). Dann folgt aus (4. 2), daß das Integral in (4. 1) in $a < x < b$ absolut konvergiert und damit nach Lemma 1, daß $f(x)$ zu $B(a, b)$ gehört. Im ersten Teil des Beweises von Satz 1 wurde bewiesen, daß die Bedingung 2) notwendig ist. Nun haben wir nach der Dreiecks-Ungleichung

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]\{F_T(t;x) - F_R(t;x)\}\right\|_1$$
$$\leqq \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]\{F_T(t;x) - F(t)\}\right\|_1 + \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]\{F_R(t;x) - F(t)\}\right\|_1.$$

Kann mithin gezeigt werden, daß für jedes x in $a < x < b$

$$\lim_{T\to\infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]\{F_T(t;x) - F(t)\}\right\|_1 = 0$$

ist, so wird damit die Notwendigkeit auch von Bedingung 3) bewiesen.

Mit Hilfe von (2. 3) und mit der im Anschluß daran hergeleiteten Darstellung für $F_T(t;x)$ erhalten wir:

$$\left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]\{F_T(t;x) - F(t)\}\right\|_1$$
$$\leqq \frac{1}{4\pi T}\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right)\left[\frac{\sin\frac{Tu}{4}}{\frac{u}{4}}\right]^2 du$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left|\exp\left[-\frac{(t-u-x)^2}{4}\right]F(t-u) - \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F(t)\right| dt$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Die hier vorgenommene Vertauschung der Integrationsordnung ist nach Fubini erlaubt. Nun existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$, so daß für alle $|u| \leqq \delta$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\exp\left[-\frac{(t-u-x)^2}{4}\right]F(t-u) - \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F(t)\right| dt < \varepsilon$$

ausfällt, da $\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ liegt.

Daher ist

$$I_2 \leqq \frac{\varepsilon}{4\pi T}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{\sin\frac{Tu}{4}}{\frac{u}{4}}\right]^2 du \leqq \varepsilon.$$

Weiterhin haben wir bei nun festem δ:

$$I_1 + I_3 \leqq \frac{4\left\|\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right]F(t)\right\|_1}{\pi}\int_{\frac{T\delta}{4}}^{\infty}\left[\frac{\sin v}{v}\right]^2 dv \leqq \varepsilon$$

für alle $T > T_0(\varepsilon)$ wegen der Konvergenz des letzten Integrals. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingungen von Satz 3 gezeigt.

Hinlänglichkeit. Aus der Bedingung 3) und der Tatsache, daß $L_1(-\infty, \infty)$ ein Banach-Raum ist, folgt für jedes $x \in (a, b)$ die Existenz einer Funktion $F(t; x)$ mit $\exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t; x) \in L_1(-\infty, \infty)$, für die

$$\lim_{T \to \infty} \left\| \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] \{F_T(t; x) - F(t; x)\} \right\|_1 = 0. \tag{4.3}$$

gilt. Weiterhin ist die Funktion $F(t; x)$ in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbar. Aus den Bedingungen 1 und 2 ergibt sich nun nach Satz 1, daß $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] d\mu(t) \qquad (a < x < b) \tag{4.4}$$

hat, wobei $\mu(t)$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] |\, d\mu(t) \,| < \infty$$

für jedes x in $a < x < b$ ist. Dazu galt für alle $x \in (a, b)$ die Darstellung

$$\mu(t) = \lim_{k \to \infty} \int_0^t F_{T_k}(u; x)\, du \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Da

$$\left| \int_0^t F_T(u; x)\, du - \int_0^t F(u; x)\, du \right|$$
$$\leqq \max_{0 \leq u \leq t} \exp\left[\frac{(u-x)^2}{4}\right] \left\| \exp\left[-\frac{(u-x)^2}{4}\right] \{F_T(u; x) - F(u; x)\} \right\|_1$$

ist, folgt aus (4. 3) für alle $x \in (a, b)$

$$\mu(t) = \int_0^t F(u; x)\, du \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Hierdurch ergibt sich die Unabhängigkeit der Funktionen $F(t; x)$ von dem Parameter $x \in (a, b)$. Definieren wir schließlich $F(t) \equiv F(t; x)$, so erhalten wir aus (4. 4) für $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-x)^2}{4}\right] F(t)\, dt \qquad (a < x < b),$$

wobei nun $F(t)$ die Bedingung (4. 2) für alle $x \in (a, b)$ erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Berens* und *P. L. Butzer*, Über die Darstellung vektorwertiger holomorpher Funktionen durch Laplace-Integrale, Math. Annalen (im Druck).
[2] *S. Bochner* und *K. Chandrasekharan*, Fourier Transforms. Princeton 1949.
[3] *I. I. Hirschman* und *D. V. Widder*, The Convolution Transform. Princeton 1955.
[4] *A. C. Offord*, On Fourier Transforms III. Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 250—266.
[5] *E. C. Titchmarsh*, Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1948.
[6] *D. V. Widder*, The Laplace Transform. Princeton 1946.

Eingegangen 26. März 1964

Einheitenberechnung mittels des Jacobi-Perronschen Algorithmus

Von *Leon Bernstein* in Tel-Aviv und *Helmut Hasse* in Hamburg

In mehreren Arbeiten [1, 2, 3] hat der Jüngere von uns Klassen reeller algebraischer Irrationalzahlen ω vom Grade n aufgewiesen, für welche der Jacobi-Perronsche verallgemeinerte Kettenbruchalgorithmus periodisch ausfällt. In der vorliegenden Arbeit bestimmen wir die aus diesen periodischen Algorithmen resultierenden algebraischen Einheiten.

Es handelt sich um die Klassen

$$(1.)\qquad \omega = \sqrt[n]{D^n + d} \text{ mit } d \mid D \text{ und } (n-2)\,d \leqq D,$$

$$(2.)\qquad \omega = \sqrt[n]{D^n - d} \text{ mit } d \mid D \text{ und } 2(n-1)\,d \leqq D,$$

$$(3.)\qquad \omega = \sqrt[3]{D^3 + 3D} \text{ mit } D \geqq 2,$$

wobei $n \geqq 3$ und d, D natürliche Zahlen bedeuten. In (1.) und (2.) kann für Primzahlpotenzgrade $n = p^r$ auch pd mit $d \mid D$ anstelle von d treten, sofern nur die geforderte Ungleichung sogar mit pd erfüllt ist.

Wir geben zuvor eine kurze Skizze des Schemas der Einheitengewinnung aus einem periodischen Jacobi-Perronschen Algorithmus.

I. Einheitengewinnung aus einem periodischen Jacobi-Perronschen Algorithmus

1. Der Jacobi-Perronsche Algorithmus in *homogener* Schreibweise besteht formal aus einem Schema der folgenden Art:

$$\begin{array}{llllll}
 & a_{00} = 1 & & a_{01} = 1 \;\cdots\cdots\; a_{0k} = 1 & & a_{0,k+1} = 1 \cdots \\
\omega_{00} & & \omega_{01} \;\cdots\cdots\; \omega_{0k} & & \omega_{0,k+1} \;\cdots\cdots & \\
 & a_{10} & & a_{11} \;\cdots\cdots\; a_{1k} & & a_{1,k+1} \;\cdots \\
\omega_{10} & & \omega_{11} \;\cdots\cdots\; \omega_{1k} & & \omega_{1,k+1} \;\cdots\cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & a_{n-1,0} & & a_{n-1,1} \;\cdots\cdots\; a_{n-1,k} & & a_{n-1,k+1} \;\cdots \\
\omega_{n-1,0} & & \omega_{n-1,1} \;\cdots\cdots\; \omega_{n-1,k} & & \omega_{n-1,k+1} \;\cdots\cdots & \\
\end{array}$$

kurz (mit Spaltenvektoren):

$$\begin{array}{llllll}
 & \mathfrak{a}_0 & & \mathfrak{a}_1 \;\cdots\cdots\; \mathfrak{a}_k & & \mathfrak{a}_{k+1} \;\cdots \\
\mathfrak{w}_0 & & \mathfrak{w}_1 \;\cdots\cdots\; \mathfrak{w}_k & & \mathfrak{w}_{k+1} \;\cdots\cdots & \\
\end{array}$$

Dabei ist $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}$ die zum Ausgang genommene Spalte aus reellen Zahlen $\omega_{i0} = \omega_i$ — hier als Basis eines reellen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\mathfrak{w})$ vom Grade n über dem rationalen Zahlkörper $\mathfrak{R}$ vorausgesetzt. Ferner besteht jeweils $\mathfrak{a}_k$ aus den *größten Ganzen*

$$a_{ik} = \left[\frac{\omega_{ik}}{\omega_{0k}}\right], \text{ speziell } a_{0k} = 1,$$

und $\mathfrak{w}_{k+1}$ aus den zugehörigen *Resten*:

$$\omega_{i-1,k+1} = \omega_{ik} - a_{ik}\,\omega_{0k} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$
$$\omega_{n-1,k+1} = \omega_{0k}.$$

Diese lineare Substitution, die $\mathfrak{w}_{k+1}$ aus $\mathfrak{w}_k$ liefert, kehrt man zweckmäßig um und führt auch noch in der letzten Gleichung $a_{0k} = 1$ als Koeffizient von $\omega_{n-1,k+1}$ ein:

$$\omega_{0k} = \qquad a_{0k}\omega_{n-1,k+1}$$
$$\omega_{ik} = \omega_{i-1,k+1} + a_{ik}\,\omega_{n-1,k+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Die so entstehende umgekehrte Substitution hat die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & a_{0k} \\ 1 & a_{1k} \\ \ddots & \\ & 1 \quad a_{n-1,k} \end{pmatrix}.$$

Damit schreibt sich der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{w}_k$ und $\mathfrak{w}_{k+1}$ kurz in der Gestalt:

$$\mathfrak{w}_k = A_k \mathfrak{w}_{k+1}.$$

Diese Einzelschritte fassen sich wie folgt zu einem Gesamtschritt zusammen, der den Zusammenhang zwischen der Ausgangsbasis $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0$ und einer späteren Restbasis $\mathfrak{w}_{k+1}$ liefert:

$$\mathfrak{w} = P_k \mathfrak{w}_{k+1} \text{ mit } P_k = A_0 \cdots A_k,$$

wobei sinngemäß $P_{-1} = I$ (Einsmatrix) zu setzen ist. Die Matrizen A_k, P_k sind ganzzahlig mit den Determinanten

$$|A_k| = (-1)^{n-1}, \quad |P_k| = (-1)^{(k+1)(n-1)}.$$

Die Matrizen P_k bauen sich auf Grund ihrer rekursiven Entstehung $P_k = P_{k-1}A_k$ wie folgt aus einer Spaltenfolge $\mathfrak{p}_k$ auf:

$$P_k = (\mathfrak{p}_{k-(n-1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k),$$

wobei die Spaltenfolge $\mathfrak{p}_k$ sich aus der den Matrizen A_k zugrunde liegenden Spaltenfolge $\mathfrak{a}_k$ vermöge der folgenden Rekursionsformeln bestimmt:

$$\mathfrak{p}_k = a_{0k}\mathfrak{p}_{k-n} + \cdots + a_{n-1,k}\mathfrak{p}_{k-1}.$$

Gemäß $P_{-1} = I$ sind dabei als Ausgangsspalten

$$\mathfrak{p}_{-n} = \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{-1} = \mathfrak{e}_n$$

die Spalten der Einsmatrix zu nehmen.

Bemerkung. Die in der Perronschen Originalarbeit [4] auftretende Matrix

$$\begin{pmatrix} A_0^{(k)} & A_0^{(k+1)} & \ldots & A_0^{k+(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1}^{(k)} & A_{n-1}^{(k+1)} & \ldots & A_{(n-1)}^{k+(n-1)} \end{pmatrix}$$

ist unsere Matrix

$$P_{k-1} = (\mathfrak{p}_{k-n}, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}).$$

Bezeichnet also p_{ik} $(i = 0, \ldots, n-1)$ die Elemente von $\mathfrak{p}_k$, so sind die Perronschen $A_i^{(k)} = p_{i,k-n}$ bei uns.

2. Der Algorithmus sei jetzt als *periodisch* vorausgesetzt, mit l-gliedriger *Vorperiode* $\mathfrak{w}_0, \ldots, \mathfrak{w}_{l-1}$ und m-gliedriger *Periode* $\mathfrak{w}_l, \ldots, \mathfrak{w}_{l+m-1}$. Das drückt sich in der homogenen Schreibweise durch die *Proportionalität*

$$\mathfrak{w}_l \sim \mathfrak{w}_{l+m}$$

aus, also durch eine *Gleichung*

$$\mathfrak{w}_l = \varepsilon \mathfrak{w}_{l+m}$$

mit einem Proportionalitätsfaktor $\varepsilon \neq 0$ aus dem Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\mathfrak{w})$. Im Hinblick auf die Algorithmusgleichung

$$\mathfrak{w}_l = P\mathfrak{w}_{l+m} \quad \text{mit} \quad P = A_l \cdots A_{l+m-1} \ (\textit{Periodenmatrix})$$

hat man dann

$$P\mathfrak{w}_{l+m} = \varepsilon \mathfrak{w}_{l+m}$$

oder also

$$(\varepsilon I - P)\, \mathfrak{w}_{l+m} = 0,$$

d. h. der Proportionalitätsfaktor ε ist Eigenwert der Periodenmatrix P, mit zugehörigem Eigenvektor $\mathfrak{w}_{l+m}$ (oder auch $\mathfrak{w}_l$). Demnach ist ε Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|\, \varepsilon I - P \,| = 0.$$

Wie Perron [4] gezeigt hat, folgt aus den Eigenschaften der *Teilnenner*spalten $\mathfrak{a}_k$ und der daraus gebildeten *Näherungswert*spalten $\mathfrak{p}_k$, daß die charakteristische Matrix $|\, \varepsilon I - P \,|$ den bei Determinante 0 höchstmöglichen Rang $n-1$ hat. Daher ist der Eigenwert ε einfach, und der zugehörige Eigenvektor $\mathfrak{w}_l$ liegt bis auf proportionale eindeutig fest, ist nämlich zu den Adjunkten irgendeiner Spalte der charakteristischen Matrix proportional. Hiernach liegen die Verhältnisse der Elemente von $\mathfrak{w}_l$ im Körper $\mathfrak{R}(\varepsilon)$. Da aber schon diese Verhältnisse den Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{w}_l)$ erzeugen, weil die Basen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}_l$ rationalzahlig linear äquivalent zu einer Basis mit erstem Element 1

sind, hat man neben der oben festgestellten Tatsache $\mathfrak{R}(\varepsilon) \leqq \mathfrak{K}$ auch die umgekehrte $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{R}(\varepsilon)$, also zusammengenommen

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Demnach ist ε ein primitives Element von $\mathfrak{K}$ (und die von ε befriedigte charakteristische Gleichung ist irreduzibel).

Da die charakteristische Gleichung ganzrationale Koeffizienten hat, deren höchster 1 und niedrigster $|P| = (-1)^{m(n-1)}$ ist, ist

$$\varepsilon \textit{ eine Einheit von } \mathfrak{K}, \textit{ mit der Norm } N(\varepsilon) = (-1)^{m(n-1)}.$$

3. Zur expliziten Bestimmung der Einheit ε aus dem Algorithmus führt der Übergang zur *inhomogenen* Schreibweise. Dieser erfolgt, indem man jede Spalte $\mathfrak{w}_k$ durch ihr Anfangsglied ω_{0k} dividiert. Die so entstehenden Spalten seien mit $\mathfrak{v}_k$, ihre Glieder mit $v_{ik} (i = 0, \ldots, n-1)$ bezeichnet. Man hat dann also den Zusammenhang:

$$\mathfrak{v}_k = \frac{\mathfrak{w}_k}{\omega_{0k}} \quad \text{und durchweg} \quad v_{0k} = 1.$$

Die Teilnennerspalten $\mathfrak{a}_k$ bleiben bei diesem Übergang erhalten.

Zur Beschreibung des Rückgangs zur homogenen Schreibweise sei ohne Einschränkung von vornherein

$$\omega_{00} = 1,$$

also

$$\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}$$

vorausgesetzt. Die Schlußglieder der weiteren Spalten $\mathfrak{v}_k (k \geqq 1)$ sind dann der Reihe nach

$$v_1 = v_{n-1,1} = \frac{\omega_{n-1,1}}{\omega_{01}}, \quad v_2 = v_{n-1,2} = \frac{\omega_{n-1,2}}{\omega_{02}}, \ldots.$$

Auf Grund der *Sprunggleichungen*

$$\omega_{n-1,k+1} = \omega_{0k}$$

des Algorithmus drücken sie sich auch so aus:

$$v_1 = \frac{\omega_{00}}{\omega_{01}} = \frac{1}{\omega_{01}}, \quad v_2 = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}, \ldots.$$

Hiernach liefert Division der inhomogenen $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots$ mit den Produkten

$$\pi_1 = v_1, \quad \pi_2 = v_1 v_2, \ldots$$

wieder die homogenen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots$, kurz:

$$\mathfrak{w}_k = \frac{\mathfrak{v}_k}{\pi_k} \quad \text{mit} \quad \pi_k = v_1 \cdots v_k \qquad (k \geqq 1).$$

Vergleich der beiden Übergänge liefert die Relationen

$$\pi_k \omega_{0k} = 1 \qquad (k \geqq 1).$$

Diese beiden Formeln gelten auch für $k = 0$, wenn man sinngemäß $\pi_0 = 1$ versteht.

Bei der inhomogenen Schreibweise drückt sich die Periodizität einfach durch die *Gleichung*

$$\mathfrak{v}_l = \mathfrak{v}_{l+m}$$

aus. Übergang zur homogenen Schreibweise liefert daraus nach Vorstehendem:

$$\pi_l \mathfrak{w}_l = \pi_{l+m} \mathfrak{w}_{l+m}.$$

Nach Wegdivision des gemeinsamen Faktors π_l wird das:

$$\mathfrak{w}_l = v_{l+1} \cdots v_{l+m} \mathfrak{w}_{l+m}.$$

Damit berechnet sich der im homogenen Algorithmus auftretende Proportionalitätsfaktor ε zu

$$\varepsilon = v_{l+1} \cdots v_{l+m},$$

also als das Produkt der Schlußglieder v_k aus den Restespalten der Periode des inhomogenen Algorithmus.

II. Anwendung auf die Irrationalitätenklasse (1)

1. Es sei $n \geqq 3$, und es seien D, d natürliche Zahlen mit

$$d \mid D, \ (n-2)\, d \leqq D.$$

Betrachtet wird die reelle algebraische Irrationalität

$$\omega = \sqrt[n]{D^n + d}\,.$$

Sie hat den genauen Grad n.

Dazu ist zu zeigen, daß der Radikand $D^n + d$ für keinen Primteiler p von n die p-te Potenz einer natürlichen Zahl ist, vielmehr echt zwischen zwei sukzessiven p-ten Potenzzahlen liegt. Setzt man $n = n_0 p$, so ist jedenfalls

$$(D^{n_0})^p = D^n < D^n + d.$$

Es genügt dann, noch zu zeigen, daß

$$D^n + d < (D^{n_0} + 1)^p = D^n + \sum_{\varrho=1}^{p} \binom{p}{\varrho} D^{\varrho n_0}$$

gilt. Dies ist aber sicher erfüllt, weil sogar gilt:

$$d \leqq \frac{D}{n-2} \leqq D < pD \leqq \binom{p}{1} D^{n_0}.$$

Als Ausgangsbasis des Algorithmus wird die Basis

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$ genommen.

2. Der Jacobi-Perronsche Algorithmus für diese Basis $\mathfrak{w}$ ist, wie in [1] gezeigt, periodisch, mit

$$\text{Vorperiodenlänge } l = n-1, \ \text{Periodenlänge } m = n,$$

und zwar stellt er sich in inhomogener Schreibweise explizit durch das folgende Schema dar:

Vorperiode	Periode
$\overline{\varphi}_{00} = 1 \quad \overline{\varphi}_{01} = 1 \ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}_{0,n-2} = 1$	$\overline{\varphi}_{0,n-1} = \overline{\varphi}_0 = 1 \quad \overline{\varphi}_{0n} = \overline{\varphi}_0 = 1 \quad \overline{\varphi}_{0,n+1} = \overline{\varphi}_0 = 1 \ldots \overline{\varphi}_{0,2n-2} = \overline{\varphi}_0 = 1$
$\varphi_{00} = 1 \quad \varphi_{01} = 1 \ldots\ldots \varphi_{0,n-2} = 1$	$\varphi_{0,n-1} = \varphi_0 = 1 \quad \varphi_{0n} = \varphi_0 = 1 \quad \varphi_{0,n+1} = \varphi_0 = 1 \ldots \varphi_{0,2n-2} = \varphi_0 = 1$
$\overline{\varphi}_{10} \quad \overline{\varphi}_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}_{1,n-2}$	$\overline{\varphi}'_1 \quad \overline{\varphi}_1 \quad \overline{\varphi}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}_1$
$\varphi_{10} = \omega \quad \varphi_{11} \ldots\ldots\ldots \varphi_{1,n-2}$	$\varphi'_1 \quad \varphi_1 \quad \varphi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_1$
$\overline{\varphi}_{20} \quad \overline{\varphi}_{21} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}'_2$	$\overline{\varphi}'_2 \quad \overline{\varphi}_2 \quad \overline{\varphi}'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}'_2$
$\varphi_{20} = \omega^2 \quad \varphi_{21} \ldots\ldots\ldots \varphi'_2$	$\varphi'_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi'_2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\overline{\varphi}_{n-2,0} \quad \overline{\varphi}_{n-2,1} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}'_{n-2}$	$\overline{\varphi}'_{n-2} \quad \overline{\varphi}_{n-2} \quad \overline{\varphi}_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}'_{n-2}$
$\varphi_{n-2,0} = \omega^{n-2} \quad \varphi_{n-2,1} \ldots\ldots\ldots \varphi'_{n-2}$	$\varphi'_{n-2} \quad \varphi_{n-2} \quad \varphi_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi'_{n-2}$
$\overline{\varphi}_{n-1,0} \quad \overline{\varphi}'_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}'_{n-1}$	$\overline{\varphi}'_{n-1} \quad \overline{\varphi}_{n-1} \quad \overline{\varphi}'_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{\varphi}'_{n-1}$
$\varphi_{n-1,0} = \omega^{n-1} \quad \varphi'_{n-1} \ldots\ldots\ldots \varphi'_{n-1}$	$\varphi'_{n-1} \quad \varphi_{n-1} \quad \varphi'_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi'_{n-1}$
$\mathfrak{a}_0 \quad \mathfrak{a}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{a}_{n-2}$	$\mathfrak{a}_{n-1} \quad \mathfrak{a}_n \quad \mathfrak{a}_{n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{a}_{2n-2}$
$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0 = \mathfrak{v}_0 \quad \mathfrak{v}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{v}_{n-2}$	$\mathfrak{v}_{n-1} \quad \mathfrak{v}_n \quad \mathfrak{v}_{n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{v}_{2n-2}$

Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \varphi_{ik}(\omega) = \sum_{j=0}^{i} \binom{k+j-1}{j} D^j \omega^{i-j} \begin{pmatrix} 0 \leqq i \leqq n-1,\ k \geqq 0; \\ \text{gebraucht nur für } k+i \leqq n \end{pmatrix} \\ \bar{\varphi}_{ik} &= \varphi_{ik}(D) = \binom{k+i}{i} D^i \end{aligned}\right\}.$$

$$\left.\begin{cases} \varphi_i = \varphi_{i,n-i}(\omega) = \sum_{j=0}^{i} \binom{(n-1)-(i-j)}{j} D^j \omega^{i-j} \\ \bar{\varphi}_i = \varphi_{i,n-i}(D) = \binom{n}{i} D^i \end{cases}\right\}.$$ (Es bedeutet also der Querstrich $^{-}$ die Ersetzung $\omega \to D$.)

$$\left.\begin{cases} \varphi_i' = \dfrac{\bar{\varphi}_i}{d} \\ \bar{\varphi}_i' = \dfrac{\bar{\varphi}_i}{d} \end{cases}\right\}.$$ (Es bedeutet also der Strich $'$ die Division mit d.)

Für diese Bildungen gelten die folgenden Regeln, auf denen der Periodizitätsbeweis wesentlich beruht:

$$\varphi_{0k} = 1, \qquad \bar{\varphi}_{0k} = 1.$$

$$\varphi_{i0} = \omega^i, \qquad \bar{\varphi}_{i0} = D^i.$$

$$\varphi_{i1} = \frac{\omega^{i+1} - D^{i+1}}{\omega - D}, \qquad \bar{\varphi}_{i1} = (i+1)\, D^i.$$

$$\varphi_{ik} - \bar{\varphi}_{ik} = (\omega - D)\, \varphi_{i-1,k+1} \qquad (i \geqq 1).$$

$$[\varphi_{ik}] = \bar{\varphi}_{ik} \quad (k + i \leqq n), \text{ insbesondere } [\varphi_i] = \bar{\varphi}_i.$$

3. Die Schlußglieder der inhomogenen Restespalten $\mathfrak{v}_k$ des vorstehenden Algorithmus sind:

$$v_k = \left\{\begin{aligned} \varphi_{n-1}' &= \frac{1}{d}\,\frac{\omega^n - D^n}{\omega - D} = \frac{1}{\omega - D} && \text{für } k \not\equiv 0 \bmod n \\ \varphi_{n-1} &= \frac{\omega^n - D^n}{\omega - D} = \frac{d}{\omega - D} && \text{für } k \equiv 0 \bmod n \end{aligned}\right\} (k \geqq 1).$$

Sie sind bereits von $k = 1$ an periodisch; darin liegt eine Besonderheit dieses Algorithmus. Die der Periode entsprechende Einheit aus $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$ ist demnach

$$\varepsilon = v_n \cdots v_{2n-1} = v_1 \cdots v_n = \pi_n = \frac{d}{(\omega - D)^n} = \frac{\omega^n - D^n}{(\omega - D)^n}.$$

Daß dies ε aus $\mathfrak{K}$ eine Einheit mit $N(\varepsilon) = (-1)^{n(n-1)} = 1$ ist, wie das nach der allgemeinen Theorie der Fall sein muß, erkennt man auch leicht direkt, durch Betrachtung der Reziproken:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} = \frac{(\omega - D)^n}{d} &= \frac{1}{d} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} D^\nu \omega^{n-\nu} \\ &= \frac{\omega^n + (-1)^n D^n}{d} + \frac{1}{d} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} D^\nu \omega^{n-\nu} \\ &= \frac{(1 + (-1)^n)\, D^n}{d} + 1 + \frac{1}{d} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} D^\nu \omega^{n-\nu}. \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Voraussetzung $d \mid D$ sind hierin alle Glieder ganz. Ferner ist

$$N(\varepsilon^{-1}) = \left(\frac{N(\omega - D)}{d}\right)^n = \left(\frac{(-1)^n N(D-\omega)}{d}\right)^n = \left(\frac{(-1)^n (D^n - \omega^n)}{d}\right)^n$$
$$= \left(\frac{(-1)^n(-d)}{d}\right)^n = (-1)^{n(n-1)} = 1.$$

Die gewonnene Darstellung von ε^{-1} durch die Basis $\mathfrak{w}$ läßt zudem erkennen, daß ε^{-1} im Ring $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}[\omega]$ über dem Ring $\mathfrak{Z}$ der ganzrationalen Zahlen liegt. Mit ε^{-1} ist dann auch ε selbst eine Einheit dieses Ringes.

Im Spezialfall $d = 1$, wo die n-gliedrige Periode sich aus n eingliedrigen Perioden zusammensetzt, ist schon

$$\varepsilon_0 = v_n = v_1 = \frac{1}{\omega - D} = \sum_{j=0}^{n-1} D^j \omega^{i-j}$$

eine Einheit aus $\mathfrak{J}$, mit $N(\varepsilon_0) = (-1)^{n-1}$.

4. Da, wie hervorgehoben, die Schlußglieder v_k der inhomogenen Restespalten $\mathfrak{v}_k$ des Algorithmus bereits von $k = 1$ an periodisch sind, tritt die Einheit ε auch schon vor Einsetzen der Periode als Proportionalitätsfaktor auf, nämlich erstmalig in der Relation:

$$\varepsilon \mathfrak{w} = P_{n-1} \mathfrak{v}_n \quad \text{mit} \quad P_{n-1} = A_0 \cdots A_{n-2} A_{n-1} = V A_{n-1} \quad (\textit{erweiterte Vorperiodenmatrix}).$$

Hieraus läßt sich auch für ε selbst die Darstellung durch die Basis $\mathfrak{w}$ ermitteln. Im Hinblick auf die Spaltendarstellung

$$P_{n-1} = (\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1})$$

und die explizite Angabe von $\mathfrak{v}_n$ im Algorithmus bedeutet nämlich die angegebene Relation das lineare Gleichungssystem

$$\varepsilon \omega^h = \sum_{i=0}^{n-1} p_{hi} v_{in} = \sum_{i=0}^{n-1} p_{hi} \varphi_i \qquad (h = 0, \ldots, n-1).$$

Speziell für $h = 0$ hat man demnach:

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} p_{0i} \varphi_i = \sum_{i=0}^{n-1} p_{0i} \sum_{j=0}^{i} \binom{(n-1)-(i-j)}{j} D^j \omega^{i-j}$$
$$= \sum_{0 \le j \le i \le n-1} \binom{(n-1)-(i-j)}{j} p_{0i} D^j \omega^{i-j}$$

(Transformation $i - j = i'$, also $i = i' + j$)

$$= \sum_{0 \le j \le i'+j \le n-1} \binom{n-1-i'}{j} p_{0,i'+j} D^j \omega^{i'}$$
$$= \sum_{i'=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1-i'} \binom{n-1-i'}{j} p_{0,i'+j} D^j \right) \omega^{i'}.$$

Demnach lautet die gesuchte Basisdarstellung:

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} e_i \omega^i \quad \text{mit} \quad e_i = \sum_{j=0}^{n-1-i} \binom{n-1-i}{j} p_{0,i+j} D^j.$$

Sie setzt direkt in Evidenz, daß ε eine Einheit des Ringes $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}[\omega]$ ist.

5. Von dem Spezialfall $d = 1$ abgesehen, wo die n-gliedrige Periode aus n eingliedrigen Perioden aufgebaut ist, sind die Proportionalitätsfaktoren

$$\pi_k = \frac{1}{(\omega - D)^k} \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

keine Einheiten. Denn aus

$$\pi_n = \frac{d}{(\omega - D)^n} = \varepsilon \text{ mit } \mathfrak{N}(\varepsilon) = 1 \text{ (Absolutnorm)}$$

folgt

$$\mathfrak{N}(\omega - D)^n = \mathfrak{N}(d) = d^n,$$

also

$$\mathfrak{N}(\omega - D)^k = d^k,$$

so daß die π_k gebrochene Zahlen mit Nenner von der Absolutnorm d^k sind.

Jedoch erweisen sich analog zu der Bildung

$$\pi_n = \frac{d}{(\omega - D)^n} = \frac{\omega^n - D^n}{(\omega - D)^n} = \varepsilon$$

die Bildungen

$$(\omega^k - D^k)\,\pi_k = \frac{\omega^k - D^k}{(\omega - D)^k} \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

jedenfalls als *ganze Zahlen* aus $\mathfrak{K}$ und sogar aus $\mathfrak{J}$.

Das sieht man mittels des betrachteten Algorithmus durch eine entsprechende Rechnung ein, wie sie vorher zur Bestimmung der Darstellung von ε durch die Basis $\mathfrak{w}$ angestellt wurde.

Definitionsgemäß hat man nämlich

$$\pi_k \mathfrak{w} = P_{k-1} \mathfrak{v}_k.$$

Für $k = 1, \ldots, n-1$ ist hierin einerseits

$$P_{k-1} = (\mathfrak{e}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{e}_n, \mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}),$$

andererseits

$$\mathfrak{v}_k = \begin{bmatrix} \varphi_{0k} \\ \vdots \\ \varphi_{n-(k-1),k} \\ \varphi'_{n-k} \\ \vdots \\ \varphi'_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demnach spielen für die erste Zeile des Produkts $P_{k-1}\mathfrak{v}_k$ nur die letzten k Spalten von P_{k-1} und daher nur die letzten k Glieder von $\mathfrak{v}_k$ eine Rolle:

$$\begin{aligned} \pi_k &= \sum_{i=n-k}^{n-1} p_{0,i-(n-k)}\, \varphi'_{n-k} \\ &= \sum_{i=n-k}^{n-1} p_{0,i-(n-k)} \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{i} \binom{(n-1)-(i-j)}{j} D^j \omega^{i-j} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{n-k \le i \le n-1} \sum_{0 \le i \le j} p_{0,i-(n-k)} \binom{(n-1)-(i-j)}{j} D^j \omega^{i-j}. \end{aligned}$$

Durch die Summationstransformation

$$\begin{Bmatrix} i - j = i' \\ j = j' \end{Bmatrix} \text{ mit der Umkehrung } \begin{Bmatrix} i = i' + j' \\ j = \quad j' \end{Bmatrix}$$

werden die Summationsbedingungen

$$\begin{Bmatrix} n - k \leqq i \leqq n - i \\ 0 \leqq j \leqq i \end{Bmatrix} \text{ zu } \begin{Bmatrix} n - k \leqq i' + j' \leqq n - 1 \\ 0 \leqq \quad j' \leqq i' + j' \end{Bmatrix},$$

oder also zu

$$\begin{Bmatrix} 0 \leqq i' \leqq n - 1 \\ \operatorname{Max}(n - k - i', 0) \leqq j' \leqq n - 1 - i' \end{Bmatrix}.$$

Damit wird:

$$\pi_k = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j = \operatorname{Max}(n-k-i, 0)}^{n-1-i} p_{0,(i+j)-(n-k)} \binom{n-1-i}{j} D^j \right) \omega^i,$$

also ausführlicher:

$$\pi_k = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{n-1} g_{ik} \omega^i$$

mit

$$g_{ik} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{j=n-k-i}^{n-k-1} p_{0,(i+j)-(n-k)} \binom{n-1-i}{j} D^j & \text{für} \quad 0 \leqq i \leqq n-k \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1-i} p_{0,(i+j)-(n-k)} \binom{n-1-i}{j} D^j & \text{für} \quad n-k \leqq i \leqq n-1 \end{Bmatrix} (k = 1, \ldots, n-1).$$

Für den zu führenden Ganzheitsbeweis kommt es nur auf π_k mod $+1$ an, d. h. es können ganzzahlige Glieder vernachlässigt werden. Im Hinblick auf $d \mid D$ brauchen daher nur die Glieder mit $j = 0$ beibehalten zu werden:

$$\pi_k \equiv \frac{1}{d} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_{0,i-(n-k)} \, \omega^i \bmod +1.$$

Hiermit ergibt sich:

$$(\omega^k - D^k) \pi_k \equiv \omega^k \pi_k \equiv \frac{\omega^n}{d} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_{0,i-(n-k)} \omega^{i-(n-k)} \equiv \frac{D^n + d}{d} \sum_{i=0}^{k-1} p_{0i} \omega^i \equiv 0 \bmod +1,$$

also die behauptete Ganzheit der Zahlen

$$\frac{\omega^k - D^k}{(\omega - D)^k} = (\omega^k - D^k) \pi_k.$$

7. Schließlich sollen noch diejenigen unter den ganzen Zahlen $\dfrac{\omega^k - D^k}{(\omega - D)^k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ ermittelt werden, welche sogar *Einheiten* sind. Das geschieht durch die Bestimmung ihrer Normen.

Einerseits war schon bei der Berechnung von $N(\varepsilon^{-1})$ festgestellt!

$$N(\omega - D) = (-1)^{n-1} d.$$

Daraus folgt:

$$N(\omega - D)^k = (-1)^{k(n-1)} d^k.$$

Andererseits sei $t = (k, n)$, also

$$k = t k_0, \; n = t n_0 \quad \text{mit} \quad (k_0, n_0) = 1,$$

sowie

$$\omega_0 = \omega^t.$$

Diese Zahl ω_0 genügt der Gleichung

$$\omega_0^{n_0} = \omega^n = D^n + d$$

und erzeugt einen Teilkörper $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{R}(\omega_0)$ von $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$ vom Grade n_0, so daß $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ den Relativgrad t hat. Entsprechendes gilt wegen $(k_0, n_0) = 1$ auch für die Zahl $\omega_0^{k_0} = \omega^k$ mit der Gleichung

$$(\omega^k)^{n_0} = \omega_0^{k_0 n_0} = (\omega^n)^{k_0} = (D^n + d)^{k_0}.$$

Die Norm in $\mathfrak{K}$ der Zahl $\omega^k - D^k$ aus $\mathfrak{K}_0$ ergibt sich nach der Normschachtelungsregel, indem man zunächst die Relativnorm für $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ nimmt, die hier einfach die t-te Potenz ist:

$$\mathsf{N}(\omega^k - D^k) = (\omega^k - D^k)^t,$$

und dann die Norm in $\mathfrak{K}_0$ bildet:

$$\begin{aligned} N(\omega^k - D^k) &= N_0(\mathsf{N}(\omega^k - D^k)) = N_0(\omega^k - D^k)^t \\ &= \left((-1)^{n_0-1}\left((D^n + d)^{k_0} - D^{kn_0}\right)\right)^t \\ &= (-1)^{t(n_0-1)}\left((D^n + d)^{k_0} - D^{nk_0}\right)^t \\ &= (-1)^{n-t}\left(\sum_{\varkappa=1}^{k_0} \binom{k_0}{\varkappa} D^{n(k_0-\varkappa)} d^\varkappa\right)^t. \end{aligned}$$

Zusammengenommen hat man demnach:

$$N\left(\frac{\omega^k - D^k}{(\omega - D)^k}\right) = (-1)^{-k(n-1)+(n-t)}\left(\frac{\sum_{\varkappa=1}^{k_0} \binom{k_0}{\varkappa} D^{n(k_0-\varkappa)} d^\varkappa}{d^{k_0}}\right).$$

Hierin ist das letzte Zählerglied d^{k_0} gleich dem Nenner. Daher ist diese Norm nur dann gleich ± 1, wenn der Zähler nur aus diesem einen Glied besteht, d. h. lediglich im Spezialfall $k_0 = 1$, $t = k$. Dieser Spezialfall ist durch $k \mid n$ gekennzeichnet.

Damit ist bewiesen:

Unter den ganzen Zahlen $\dfrac{\omega^k - D^k}{(\omega - D)^k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ *sind genau diejenigen Einheiten* ε_k *aus* $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$, *und sogar aus* $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}[\omega]$, *für welche* $k \mid n$ *ist, und zwar mit*

$$N(\varepsilon_k) = (-1)^{(k-1)n}.$$

Der vorher schon behandelte Fall $k = n$ mit $\varepsilon_n = \varepsilon$ konnte in dies Ergebnis einbezogen werden. Der Fall $k = 1$ liefert die triviale Einheit $\varepsilon_1 = 1$.

Schlußbemerkung zu Abschnitt II. Die in **1** bis **4** durchgeführte Bestimmung der durch den Algorithmus gelieferten Einheit ε gilt auch für den eingangs erwähnten Zusatzfall zu (1.), daß bei Primzahlpotenzgrad $n = p^\nu$ der Teiler $d \mid D$ durch pd mit $(p^\nu - 2)\, pd \leqq D$ ersetzt wird. Dagegen ist der in **5** bis **7** erbrachte Nachweis weiterer Einheiten ε_k $(k \mid n)$ für jenen Zusatzfall nicht mehr allgemein gültig, weil dann die Koeffizienten der Basisdarstellung nicht mehr notwendig ganz sind, wie man leicht durch Gegenbeispiele bestätigt.

III. Anwendung auf die Irrationalitätenklasse (2)

1. *Es* sei $n \geqq 3$, und es seien D, d natürliche Zahlen mit

$$d \mid D, \; 2(n-1)\, d \leqq D.$$

Betrachtet wird die reelle algebraische Irrationalität

$$\omega = \sqrt[n]{D^n - d}\,.$$

Sie hat den genauen Grad n.

Dazu ist wieder zu zeigen, daß der Radikand $D^n - d$ für keinen Primteiler p von n die p-te Potenz einer natürlichen Zahl ist, vielmehr echt zwischen zwei sukzessiven p-ten Potenzzahlen liegt. Setzt man $n = n_0 p$, so ist jedenfalls

$$(D^{n_0})^p = D^n > D^n - d.$$

Es genügt dann noch zu zeigen, daß

$$D^n - d = (D^{n_0})^p - d > (D^{n_0} - 1)^p$$

oder also

$$(D^{n_0})^p - (D^{n_0} - 1)^p > d$$

ist. Daß dies zutrifft, erkennt man hier folgendermaßen. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$(D^{n_0})^p - (D^{n_0} - 1)^p = p\,(D^{n_0} - \vartheta)^{p-1} \text{ mit } 0 < \vartheta < 1,$$

also sicher

$$(D^{n_0})^p - (D^{n_0} - 1)^p > p(D^{n_0} - 1)^{p-1} \geqq p\left(\frac{D^{n_0}}{2}\right)^{p-1} \geqq 2\,\frac{D^{n_0}}{2} = D^{n_0} \geqq D \geqq 2(n-1)\, d > d.$$

Als Ausgangsbasis des Algorithmus wird wieder die Basis

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$ genommen.

2. Der Jacobi-Perronsche Algorithmus für diese Basis $\mathfrak{w}$ ist, wie in [2] gezeigt, periodisch mit

Vorperiodenlänge $l = 1 + (n-2)\, n = (n-1)^2$, Periodenlänge $m = nn = n^2$,

und zwar setzt sich die auf den Beginn

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \omega - D + 1 \\ & D - 1 & \\ \omega & & \omega^2 - D^2 + 1 \\ & D^2 - 1 & \\ \omega^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \omega^{n-1} - D^{n-1} + 1 \\ & D^{n-1} - 1 & \\ \omega^{n-1} & & 1 \end{array}$$

folgende Entwicklung aus $(n-2) + n$ je n-gliedrigen Spaltengruppen zusammen, die in [2] *Fugen* genannt wurden.

Eine solche Fuge hat die Gestalt:

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & 1 & & 1 & & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_0 = 1 \\
\xi_0 & 1 & \dfrac{\xi_1}{\xi_0} & 1 & \dfrac{\xi_2}{\xi_1} & 1 \ldots\ldots & \dfrac{1-\xi_0}{\xi_{n-2}} & 1 = \eta_0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_1 \\
\xi_1 & \dfrac{\xi_1}{\xi_0} & \dfrac{\xi_2}{\xi_0} & \dfrac{\xi_2}{\xi_1} & \dfrac{\xi_3}{\xi_1} & \dfrac{\xi_3}{\xi_2} \ldots\ldots & \dfrac{\xi_0-\xi_1}{\xi_{n-2}} & \dfrac{\xi_0-\xi_1}{1-\xi_0} = \eta_1 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_2 \\
\xi_2 & \dfrac{\xi_2}{\xi_0} & \dfrac{\xi_3}{\xi_0} & \dfrac{\xi_3}{\xi_1} & \dfrac{\xi_4}{\xi_1} & \dfrac{\xi_4}{\xi_2} \ldots\ldots & \dfrac{\xi_1-\xi_2}{\xi_{n-2}} & \dfrac{\xi_1-\xi_2}{1-\xi_0} = \eta_2 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & 0 & & 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{n-3} \\
\xi_{n-3} & \dfrac{\xi_{n-3}}{\xi_0} & \dfrac{\xi_{n-2}}{\xi_0} & \dfrac{\xi_{n-2}}{\xi_1} & \dfrac{1-\xi_0}{\xi_1} & \dfrac{1-\xi_0}{\xi_2} \ldots\ldots & \dfrac{\xi_{n-4}-\xi_{n-3}}{\xi_{n-2}} & \dfrac{\xi_{n-4}-\xi_{n-3}}{1-\xi_0} = \eta_{n-3} & \\
 & 0 & & 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{n-2} \\
\xi_{n-2} & \dfrac{\xi_{n-2}}{\xi_0} & \dfrac{1-\xi_0}{\xi_0} & \dfrac{1-\xi_0}{\xi_1} & \dfrac{\xi_0-\xi_1}{\xi_1} & \dfrac{\xi_0-\xi_1}{\xi_2} \ldots\ldots & \dfrac{\xi_{n-3}-\xi_{n-2}}{\xi_{n-2}} & \dfrac{\xi_{n-3}-\xi_{n-2}}{1-\xi_0} = \eta_{n-2} & \\
 & 1 & & 1 & & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{n-1} \\
\xi_{n-1} = 1 & \dfrac{1}{\xi_0} & 1 & \dfrac{\xi_0}{\xi_1} & 1 & \dfrac{\xi_1}{\xi_2} \ldots\ldots & 1 & \dfrac{\xi_{n-2}}{1-\xi_0} = \eta_{n-1} &
\end{array}
$$

Dabei wurden die Restespalten, wie sie durch Subtraktion der größten Ganzen und Hinzunahme des Divisors 1 als Schlußglied entstehen, der inhomogenen Durchführung des Algorithmus entsprechend immer gleich anschließend auf Anfangsglied 1 normiert.

Zur Mitteilung eines aus solchen Fugen zusammengesetzten Algorithmus genügt es vollständig, von jeder Fuge nur die abschließende inhomogene Restespalte $\mathfrak{y} = (\eta_i)$ und die daraus durch Bildung der größten Ganzen entstehende Teilnennerspalte $\mathfrak{a} = (a_i)$ — in [2] *Akkumulator* genannt — anzugeben. Die homogene Anfangsspalte $\mathfrak{x} = (\xi_i)$ berechnet sich aus $\mathfrak{y}$ rückwärts vermöge der Formeln:

$$
\begin{aligned}
1 + \eta_1 &= \frac{1-\xi_1}{1-\xi_0}, \\
1 + \eta_1 + \eta_2 &= \frac{1-\xi_2}{1-\xi_0}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 + \eta_1 + \cdots + \eta_{n-2} &= \frac{1-\xi_{n-2}}{1-\xi_0}, \\
1 + \eta_1 + \cdots + \eta_{n-1} &= \frac{1}{1-\xi_0},
\end{aligned}
$$

oder also

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (\xi_0 - 1)(1 + \eta_1) && + 1,\\
\xi_2 &= (\xi_0 - 1)(1 + \eta_1 + \eta_2) && + 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_{n-2} &= (\xi_0 - 1)(1 + \eta_1 + \cdots + \eta_{n-2}) && + 1,
\end{aligned}$$

mit

$$\xi_0 - 1 = -\frac{1}{1 + \eta_1 + \cdots + \eta_{n-1}}.$$

Das für die Einheitenbestimmung nach I, 3 *wichtige Produkt* π *der Schlußglieder aus den inhomogenen Restespalten der Fuge ist nach dem vorstehenden Schema gegeben durch*

$$\pi = \frac{1}{\xi_0}\,\frac{\xi_0}{\xi_1}\cdots\frac{\xi_{n-3}}{\xi_{n-2}}\,\frac{\xi_{n-2}}{1-\xi_0} = \frac{1}{1-\xi_0},$$

bestimmt sich also schon durch das Anfangsglied ξ_0 *der homogenen Anfangsspalte* $\mathfrak{x}$ *der Fuge.* Im Hinblick hierauf werden diese Anfangsspalten im folgenden bei der expliziten Angabe des Algorithmus mit aufgeführt, obwohl das, wie gesagt, an sich entbehrlich wäre.

3. Zur formelmäßigen Angabe der Spalten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ für die $n-2$ Fugen der Vorperiode und n Fugen der Periode geht man zweckmäßig von dem Spezialfall $d = 1$ aus, also

$$\omega = \sqrt[n]{D^n - 1} \quad \text{mit} \quad D \geqq 2(n-1),$$

und gibt dann nachträglich an, welche Modifikationen im allgemeinen Falle vorzunehmen sind. In diesem Spezialfall stimmen die n Periodenfugen überein, so daß sich die Periode auf eine einzige Fuge reduziert. Für die insgesamt $n-1$ Fugen von Vorperiode und Periode sind die homogenen Anfangsspalten und die inhomogenen Schlußspalten in dem folgenden Schema explizit zusammengestellt:

Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet:

$$\varphi_{ik} = \sum_{j=0}^{i} \binom{k+j-1}{j} D^j \omega^{i-j} \qquad \left(\begin{matrix} 0 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq k \leqq n-1 \\ \text{gebraucht nur für } k+i \leqq n \end{matrix}\right).$$

$$\varphi_i = \varphi_{i,n-i}.$$

$$\Delta^h \varphi_{ik} = \sum_{j=0}^{h} (-1)^j \binom{h}{j} \varphi_{i-j,k} \qquad (\text{gebraucht nur für } h = k,\ k-1).$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{ik} = &\sum_{j=0}^{k+i-n} (-1)^j \binom{n-i+j-1}{j} \varphi_{i-j}\\
&+ \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^{k+i-n+j} \binom{k}{n-i-j} \varphi_{n-k-j,k} \qquad \left(\begin{matrix} 1 \leqq i \leqq n-1 \\ 1 \leqq k \leqq n-1 \\ k+i \geqq n \end{matrix}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ik} = &\sum_{j=0}^{k+i-n} (-1)^j \binom{n-i+j-2}{j} \varphi_{i-j}\\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k+i-n+j} \binom{k-1}{n-i-j-1} \varphi_{n-k-j,k} \qquad \left(\begin{matrix} 2 \leqq i \leqq n-2 \\ 1 \leqq k \leqq n-1 \\ k+i \geqq n \end{matrix}\right).
\end{aligned}$$

Vorperiode						Periode
$\langle\varphi_{01}\rangle\ \Delta\varphi_{01}=1$	$\langle\Delta\varphi_{02}\rangle\ \Delta^2\varphi_{02}=1$	$\langle\Delta^2\varphi_{03}\rangle\ \Delta^3\varphi_{03}=1$	$\cdots\cdots$	$\langle\Delta^{n-3}\varphi_{0,n-2}\rangle\ \Delta^{n-2}\varphi_{0,n-2}=1$	$\langle\Delta^{n-2}\varphi_{0,n-1}\rangle\ \Delta^{n-1}\varphi_{0,n-1}=1$
$\langle\varphi_{11}\rangle\ \Delta\varphi_{11}$	$\langle\Delta\varphi_{12}\rangle\ \Delta^2\varphi_{12}$	$\langle\Delta^2\varphi_{13}\rangle\ \Delta^3\varphi_{13}$	$\cdots\cdots$	$\langle\Delta^{n-3}\varphi_{1,n-2}\rangle\ \Delta^{n-2}\varphi_{1,n-2}$	$\langle\Delta^{n-2}\varphi_{1,n-1}\rangle\ \Delta^{n-1}\varphi_{1,n-1}$
$\langle\varphi_{21}\rangle\ \Delta\varphi_{21}$	$\langle\Delta\varphi_{22}\rangle\ \Delta^2\varphi_{22}$	$\langle\Delta^2\varphi_{23}\rangle\ \Delta^3\varphi_{23}$	$\cdots\cdots$	$\langle\Delta^{n-3}\varphi_{2,n-2}\rangle\ \Delta^{n-2}\varphi_{2,n-2}$	$\langle\Psi_{2,n-1}\rangle\ \Phi_{2,n-1}$
$\langle\varphi_{31}\rangle\ \Delta\varphi_{31}$	$\langle\Delta\varphi_{32}\rangle\ \Delta^2\varphi_{32}$	$\langle\Delta^2\varphi_{33}\rangle\ \Delta^3\varphi_{33}$	$\cdots\cdots$	$\langle\Psi_{3,n-2}\rangle\ \Phi_{3,n-2}$	$\langle\Psi_{3,n-1}\rangle\ \Phi_{3,n-1}$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\langle\varphi_{n-3,1}\rangle\ \Delta\varphi_{n-3,1}$	$\langle\Delta\varphi_{n-3,2}\rangle\ \Delta^2\varphi_{n-3,2}$	$\langle\Delta^3\varphi_{n-3,3}\rangle\ \Delta^3\varphi_{n-3,3}$	$\cdots\cdots$	$\langle\Psi_{n-3,n-2}\rangle\ \Phi_{n-3,n-2}$	$\langle\Psi_{n-3,n-1}\rangle\ \Phi_{n-3,n-1}$
$\langle\varphi_{n-2,1}\rangle\ \Delta\varphi_{n-2,1}$	$\langle\Delta\varphi_{n-2,2}\rangle\ \Delta^2\varphi_{n-2,2}$	$\langle\Psi_{n-2,3}\rangle\ \Phi_{n-2,3}$	$\cdots\cdots$	$\langle\Psi_{n-2,n-2}\rangle\ \Phi_{n-2,n-2}$	$\langle\Psi_{n-2,n-1}\rangle\ \Phi_{n-2,n-1}$
$1\ \ \Delta\varphi_{n-1,1}$	$1\ \ \Phi_{n-1,2}$	$1\ \ \Phi_{n-1,3}$	$\cdots\cdots$	$1\ \ \Phi_{n-1,n-2}$	$1\ \ \Phi_{n-1,n-1}$

Die in D, ω homogenen Polynome φ_{ik} der Grade i kamen bereits in II, 2 vor, ebenso auch die speziell für $k+i=n$ vorliegenden φ_i. In den weiteren Bildungen ist $\varphi_{rk}=0$ für $r<0$ zu verstehen. Die Bildungen $\Delta^{k-1}\varphi_{ik}$ und Ψ_{ik} selbst kommen im Algorithmus nicht vor, sondern nur die aus ihnen abgeleiteten Bildungen

$$\langle\Delta^{k-1}\varphi_{ik}\rangle=(\omega-D)\,\Delta^{k-1}\varphi_{ik}-1\,,$$

$$\langle\Psi_{ik}\rangle=(\omega-D)\,\Psi_{ik}-1\,.$$

Man beachte die Identitäten

$$\Delta^k\varphi_{n-k,k}=\Phi_{n-k,k}\,,\ \Delta^{k-1}\varphi_{n-k,k}=\Psi_{n-k,k},$$

auf Grund deren in den Restespalten des Algorithmus auftretende Wechsel von den $\Delta^k\varphi_{ik}$, $\langle\Delta^{k-1}\varphi_{ik}\rangle$ zu den Φ_{ik}, $\langle\Psi_{ik}\rangle$ bei $i=n-k$ als ein stetiger Anschluß erscheint.

Die vorstehenden Formeln sind gegenüber denen in der Originalarbeit [2] durch weitestmögliche Zusammenfassung von Gliedern φ_{rs} vermöge von Summenformeln für Binomialkoeffizienten vereinfacht. Auch die Indizierung ist hier verändert, und zwar derart, daß durchweg der erste Index die Zeile und der zweite Index die Spalte (Fugennummer) im von links nach rechts durchgeführten (abgekürzten) Algorithmus angibt. Dadurch sind allerdings die Bildungen Φ_{ik} und Ψ_{ik} etwas komplizierter geworden; ihre einfachste Gestalt erhalten sie bei $i\to n-i$.

Was weiter die den Schlußspalten der Fugen zugeordneten Teilnennerspalten (Akkumulatoren) betrifft, so ergeben sie sich wieder einfach durch die Ersetzung $\omega\to D$, hier noch unter Subtraktion von 1, also in der Bezeichnungsweise aus I 2 allgemein:

$$[\Delta^k\varphi_{ik}]=\Delta^k\overline{\varphi}_{ik}-1\quad(1\leqq i\leqq n-k),$$

$$[\Phi_{ik}]=\ \ \overline{\Phi}_{ik}-1\quad(n-k\leqq i\leqq n-1).$$

Die homogene Anfangsspalte der ersten Vorperiodenfuge findet sich im Hinblick auf

$$\frac{\omega^{i+1}-D^{i+1}}{\omega-D}$$

als

$$\xi_{i1}=\langle\varphi_{i1}\rangle=\omega^{i+1}-D^{i+1}+1$$
$$(i=0,\ldots,n-2),$$

wie es nach dem zuvor angegebenen Beginn des Algorithmus sein soll.

4. Um aus dem vorstehend beschriebenen Algorithmus für den Spezialfall $d = 1$ den Algorithmus für den allgemeinen Fall

$$\omega = \sqrt{D^n - d} \quad \text{mit} \quad d \mid D,\ 2(n-1)\,d \leqq D$$

herzuleiten, beachte man, daß die im Algorithmusschema auftretenden Bildungen $\Delta^k \varphi_{ik}$, $\Delta^{k-1}\varphi_{ik}$, Φ_{ik}, Ψ_{ik} Linearformen in den Polynomen φ_{rs} sind. Die anzubringende Modifikation besteht darin, daß man in diesen Linearformen an gewissen Stellen die speziellen Polynome $\varphi_{r,n-r}$ durch d zu dividieren hat. Das nachfolgende Schema gibt eine Übersicht darüber, an welchen Stellen diese Divisionen auszuführen sind.

Vorperiode

Zeile	1	2	3	...	$n-2$
0				...	
1				...	
2				...	+ +
...	...	...	...	...	...
$n-3$			+ +	...	+ +
$n-2$		+ +	+ +	...	+ +
$n-1$	+	+	+	...	+

Periode

Zeile	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n-2$
0		0				...	
1	0 0	1				...	
2	1 1	2				...	0 0
...	...	...	...	...	...	...	...
$n-3$	$n-4$ $n-4$	$n-3$			0 0	...	$n-5$ $n-5$
$n-2$	$n-3$ $n-3$	$n-2$		0 0	1 1	...	$n-4$ $n-4$
$n-1$	$n-2$		0	1	2	...	$n-3$

Im Kopf sind die Fugennummern k durchlaufend für Vorperiode und Periode angegeben. Die beiden Spalten unter jeder Fugennummer beziehen sich auf die im Algorithmusschema aus III, **3** aufgeführte homogene Anfangsspalte und inhomogene Endspalte der Fuge. Die Zeichen $+$, die nur in der Vorperiode auftreten, bedeuten, daß an diesen Stellen alle speziellen Polynome $\varphi_{r,n-r}$ durch d zu dividieren sind. In $\Delta^k \varphi_{n-k,k}$ und $\Delta^{k-1}\varphi_{n-k,k}$ ist das gerade der erste Summand, in $\Phi_{i,k}$ und $\Psi_{i,k}$ gerade die erste Summe.

Man beachte, daß

$$\Phi_{i,n-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{n-i+j-1}{j} \varphi_{i-j} + (-1)^i \binom{n-1}{i}$$
$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{n-i+j-1}{j} \varphi_{i-j} \qquad (1 \leqq i \leqq n-1)$$

und

$$\Psi_{i,n-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{n-i+j-2}{j} \varphi_{i-j} + (-1)^i \binom{n-2}{i}$$
$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{n-i+j-2}{j} \varphi_{i-j} \qquad (1 \leqq i \leqq n-2)$$

ist und für $\Psi_{i,n-1}$ jetzt auch $i = 0$ zugelassen wird. Sei nun

$$\Phi'_{i,n-1} = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{t} (-1)^j \binom{n-i+j-1}{j} \varphi_{i-j} + \sum_{j=t+1}^{i} (-1)^j \binom{n-i+j-1}{j} \varphi_{i-j} \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq i \leqq n-1 \\ 0 \leqq t < i \end{pmatrix}$$

und

$$\Psi'_{i,n-1} = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{t} (-1)^j \binom{n-i+j-2}{j} \varphi_{i-j} + \sum_{j=t+1}^{i} (-1)^j \binom{n-i+j-2}{j} \varphi_{i-j} \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq i \leqq n-2 \\ 0 \leqq t \leqq i \end{pmatrix};$$

dann erhält man aus der Periodenfuge

$$\begin{array}{cc}
\langle \Psi_{0,n-1} \rangle & 1 \\
\langle \Psi_{1,n-1} \rangle & \Phi_{1,n-1} \\
\langle \Psi_{2,n-1} \rangle & \Phi_{2,n-1} \\
\langle \Psi_{3,n-1} \rangle & \Phi_{3,n-1} \\
\vdots & \vdots \\
\langle \Psi_{n-3,n-1} \rangle & \Phi_{n-3,n-1} \\
\langle \Psi_{n-2,n-1} \rangle & \Phi_{n-2,n-1} \\
1 & \Phi_{n-1,n-1}
\end{array}$$

des speziellen Falles die n Periodenfugen des allgemeinen Falles, indem man die in der Tabelle angegebenen Werte für t einsetzt. Man beachte übrigens die völlige Analogie der Verteilung dieser Pluszeichen bzw. t-Werte in den inhomogenen Endspalten mit der Verteilung der Striche im Algorithmusschema aus II, 2, die dort die Division durch d andeuten.

Durch die Divisionen durch d wird die Regel für die Bildung der Akkumulatoren nicht beeinträchtigt. Auch für die aus $\Delta^k \varphi_{i,k}$, Φ_{ik} durch diese Divisionen entstehenden Ausdrücke $\Delta^k \varphi'_{ik}$, $\Phi'_{i,k}$, $\Phi'_{i,n-1}$ hat man wieder

$$[\Delta^k \varphi'_{i,k}] = \Delta^k \bar{\varphi}'_{i,k} - 1 \qquad (1 \leqq i \leqq n-k)$$

$$[\Phi'_{ik}] = \bar{\Phi}'_{i,k} - 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqq k \leqq n-2 \\ n-k \leqq i \leqq n-1 \end{pmatrix}$$

$$[\Phi^t_{i,n-1}] = \bar{\Phi}^t_{i,n-1} - 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqq i \leqq n-1 \\ 0 \leqq t < i \end{pmatrix}.$$

5. Was schließlich die durch den betrachteten Algorithmus gelieferte Einheit ε betrifft, so bestimmt sich diese nach der Regel aus I, 3 und dem Ergebnis aus II, 2 als das Produkt

$$\varepsilon = \pi_{n-1} \cdots \pi_{2n-2}$$

mit

$$\pi_k = \frac{1}{1 - \xi_{0k}} \qquad (k = n-1, \ldots, 2n-2),$$

wo die ξ_{0k} die Anfangsglieder der homogenen Anfangsspalten der Periodenfugen bedeuten.

Nach dem Algorithmusschema aus III, 3 und unter Berücksichtigung der Modifikation aus III, 4 ist nun

$$\xi_{0k} = \langle \Delta^{n-2} \varphi_{0,n-1} \rangle = (\omega - D) + 1 \qquad \text{für alle } k \neq n,$$

während für $k = n$ durch d zu dividieren, also

$$\xi_{0n} = \frac{\omega - D}{d} + 1$$

ist. Damit wird

$$\varepsilon = \frac{d}{(D-\omega)^n} = \frac{D^n - \omega^n}{(D-\omega)^n}.$$

Ganz analog wie in II, 3 erkennt man wieder auch leicht direkt, daß dies ε eine Einheit aus $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}[\omega]$, hier mit $N(\varepsilon) = 1$ ist.

6. Analog zu II, 4 sind auch hier wieder die Anfangsglieder ξ_{0k} der homogenen Anfangsspalten schon von der ersten Vorperiodenfuge an periodisch. Diese Tatsache kann wie dort zur Berechnung der Darstellung der gewonnenen Einheit ε durch die Basis $\mathfrak{w}$ ausgenutzt werden. Im Hinblick auf die hier sehr viel komplizierteren Ausdrücke für die Akkumulatoren der Vorperiodenfugen soll jedoch von der Durchführung dieser Rechnung abgesehen werden, ebenso auch von der zu II, 5 und 6 analogen Untersuchung der Zahlen $\frac{D^k - \omega^k}{(D-\omega)^k}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ auf Ganzzahligkeit und Einheiteneigenschaft.

Schlußbemerkung zu Abschnitt III. Die in 1 bis 5 durchgeführte Bestimmung der durch den Algorithmus gelieferten Einheit ε gilt auch für den eingangs erwähnten Zusatzfall zu (2.), daß bei Primzahlpotenzgrad $n = p^\nu$ der Teiler $d \mid D$ durch pd mit $2(p^\nu - 1)\,pd \leqq D$ ersetzt wird.

IV. Anwendung auf die Irrationalitätenklasse (3)

Es handelt sich um die reellen kubischen Irrationalitäten

$$\omega = \sqrt[3]{D^3 + 3D}$$

mit natürlichem $D \geqq 2$. Als Ausgangsbasis wird die Basis

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$ genommen.

Der Jacobi-Perronsche Algorithmus für diese Basis $\mathfrak{w}$ ist, wie in [3] gezeigt, periodisch mit

Vorperiodenlänge $l = 4$, Periodenlänge $m = 4$.

Aus dem dort in extenso wiedergegebenen Schema der Entwicklung entnimmt man als Schlußglieder der inhomogenen Restespalten der Periode:

$$v_5 = \frac{\omega^2 + D\omega + D^2}{3D} = \frac{(1, 10, 100)}{30},$$

$$v_6 = \frac{(D+2)\,\omega^2 + (D^2 - D + 4)\,\omega + (D^3 + 2D^2 + 5D)}{3D^3 + 9D - 8} = \frac{(12, 1\bar{1}4, 1250)}{309\bar{8}},$$

$$v_7 = \frac{(D+1)\,\omega^2 + (D-1)^2\omega + (D^3 - 2D^2 - D - 2)}{3D^2 + 1} = \frac{(11, 1\bar{2}1, 1\bar{2}\bar{1}\bar{2})}{301},$$

$$v_8 = \omega^2 + D\omega + (D^2 + 1) = (1, 10, 101).$$

Die dabei jedesmal hinzugefügte Ziffernschreibweise der Zahlen aus $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(\omega)$ in Basisdarstellung durch $\mathfrak{w}$ ist wohl ohne weitere Erklärung verständlich. Unter ihrer Verwendung berechnet sich die durch den Algorithmus gelieferte Einheit

$$\varepsilon = v_5 v_6 v_7 v_8$$

mit ganz geringer Mühe zu

$$\varepsilon = (101, 1020, 10301) = (D^2 + 1)\,\omega^2 + (D^3 + 2D)\,\omega + (D^4 + 3D^2 + 1).$$

Wie man leicht bestätigt, ist das gerade die nach dem Schema aus II, **3** gebildete Einheit:

$$\varepsilon = \frac{\omega^3 - D^3}{(\omega - D)^3}$$

aus $\mathfrak{J} = \mathfrak{Z}[\omega]$ mit $N(\varepsilon) = 1$, mit der Reziproken

$$\varepsilon^{-1} = -\omega^2 + D\omega + 1.$$

Literaturverzeichnis

[1] *L. Bernstein*, Periodical continued fractions for irrationals of degree n by Jacobi's algorithm. Dieses Journal **213** (1964), 31—38.

[2] *L. Bernstein*, Representation of $\sqrt[n]{D^n - d}$ as a periodical continued fraction by Jacobi's algorithm. Mathematische Nachrichten (im Druck).

[3] *L. Bernstein*, Periodicity of Jacobi's algorithm for a special type of cubic irrationals. Dieses Journal **213** (1964), 137—146.

[4] *O. Perron*, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Mathematische Annalen **64** (1907), 1—76.

Eingegangen 9. April 1964

Some existence theorems on differential equations of generalized order[1])

By *M. A. Al-Bassam* at Lubbock (Texas)

To Professor H. J. Ettlinger on the occasion of his completion of fifty years of service at the Department of Mathematics of the University of Texas

---

Theorem 1. *If $f(x, y)$ is a real-valued, continuous and Lipschitzian function, i. e. $f(x, y) \in (C, \mathrm{Lip})$, on a domain D of the (xy)-plane and $\sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)| = M < \infty$, then there exists a unique and continuous solution $y = y(x)$ which satisfies the differential equation*

$$y^{(\alpha)} = f(x, y), \quad 0 < \alpha \leqq 1 \text{ [2]},$$

together with the condition $y^{(\alpha-1)}(a) = \eta$ in the region $R \subset D$:

$$a < x \leqq a + h, \quad |(x - a)^{1-\alpha} y(x) - b| \leqq k,$$

where $b = \dfrac{\eta}{\Gamma(\alpha)}$, $k > \dfrac{Mh}{\Gamma(\alpha + 1)}$.

Proof. Define the sequence of functions $\{y_r\}_{r=0}^{\infty}$ as follows:

$$y_0(x) = \frac{\eta (x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

$$y_n(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

It will be shown that $\lim_{n\to\infty} y_n$ exists and is the required solution.

(i) First it will be proved by induction that, for $a < x \leqq a + h$, $y = y_n(x)$ is contained in R for all n; i. e., $b - k < (x - a)^{1-\alpha} y_n < b + k$.

If $y = y_n(x)$ is in R then

$$|(x - a)^{1-\alpha} y_n - b| \leqq \frac{|(x - a)^{1-\alpha}|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |(x - t)^{\alpha-1} f[t, y_{n-1}(t)]|\, dt \leqq \frac{Mh}{\Gamma(\alpha + 1)} < k.$$

---

[1]) Presented to the Mathematical Association of America (Texas Section), April 10, 1964.

[2]) $y^{(\alpha)} = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} y$, as defined in [2].

The same argument shows that

$$|(x-a)^{1-\alpha} y_1(x) - b| \leqq \frac{Mh}{\Gamma(\alpha+1)} < k.$$

(ii) Also it may be proved, by induction, that

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq \frac{MA^{n-1}|(x-a)^{n\alpha}|}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

for all n, where A is the Lipschitz constant, as $f(x, y) \in (C, \mathrm{Lip})$, i. e.,

$$|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)| \leqq A\,|Y_1 - Y_2|,$$

for Y_1 and Y_2 in R.

Suppose that when $a < x \leqq a + h$

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqq \frac{MA^{n-2}|(x-a)^{\overline{n-1}\alpha}|}{\Gamma(\overline{n-1}\alpha+1)}.$$

Then

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |(x-t)^{\alpha-1}|\,|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|\,dt,$$

by the Lipschitz condition, so that

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq \frac{MA^{n-1}}{\Gamma(\overline{n-1}\alpha+1)} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} |(x-a)^{\overline{n-1}\alpha}| = \frac{MA^{n-1}|(x-a)^{\alpha n}|}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

But the inequality holds for $n = 1$, it is therefore true for all values of n.

(iii) The sequence $\{y_n(x)\}$ converges uniformly to a limit function $y(x)$ for

$$a < a_1 \leqq x \leqq a + h.$$

From (ii) the terms of the series

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - y_0) = \sum_{k=1}^{\infty} [y_k(x) - y_{k-1}(x)]$$

are numerically less than the corresponding terms of the convergent series

$$M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} h^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

which converges to $M \overset{h}{\underset{0}{I}} E_\alpha(A; h)$, (see [3], pp. 359—360). Further it may be noted that each term $[y_k(x) - y_{k-1}(x)]$ of the above series is a continuous function of x on the interval $(a, a + h)$. Consequently the limit function $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ exists and is a continuous function of x in $(a, a + h)$, since by Weierstrass M-test the former series converges uniformly in the indicated interval.

(iv) $y = y(x)$ satisfies the equation $y^{(\alpha)} = f(x, y)$. Since $y_n(x) \to y(x)$ as $n \to \infty$ uniformly in $a < a_1 \leqq x \leqq a + h$ and $f(x, y) \in (C, \mathrm{Lip})$, it follows that $f(x, y_n)$ tends

uniformly to $f(x, y)$ as $n \to \infty$. Therefore

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n(x) \\ &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f[t, y_{n-1}(t)] \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt \\ &= y_0 + \int_a^x f[t, y(t)] \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt \\ &= y_0 + \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} f. \end{aligned}$$

Furthermore

$$y^{(\alpha)}(x) = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} y = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} y_0 + \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} f = f(x, y),$$

since $\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} y_0 = \eta \dfrac{(x-a)^{-1}}{\Gamma(0)} = 0$, and $\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} f = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{0} f = f(x, y)$.

Also the condition $y^{(\alpha-1)}(a) = \eta$ is satisfied, since

$$y^{(\alpha-1)}(x) = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{1-\alpha} y = \eta + \overset{x}{\underset{a}{I}} f.$$

Therefore the limit-function $y(x)$ exists and satisfies the equation together with the condition $y^{(\alpha-1)}(a) = \eta$.

(v) Uniqueness of the solution. It may be proved now that the solution $y = y(x)$ just obtained is the only one for which $y^{(\alpha-1)}(a) = \eta$.

Suppose that $Y(x)$ is another solution distinct from $y(x)$ satisfying the condition $Y^{(\alpha-1)}(a) = \eta$, continuous in $(a, a+h)$ and is such that $|Y(x) - y(x)| \leqq K$ in this interval. Then from the relation

$$Y(x) - y(x) = \int_a^x \{f[t, Y(t)] - f[t, y(t)]\} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt,$$

we have

$$|Y(x) - y(x)| < \frac{A\,K\,|(x-a)^{\alpha}|}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

The argument may be repeated to obtain the sequence $\{U_n\}$ of upper bounds of $|Y(x) - y(x)|$ in the interval $(a, a+h)$ where $U_n = \dfrac{A^n K\,|(x-a)^{n\alpha}|}{\Gamma(n\alpha+1)}$. But $U_n \to 0$ as $n \to \infty$, and so $Y(x) = y(x)$ in $(a, a+h)$ and the proof is complete.

Remark. The method of contraction mapping defined on a complete metric space, may be used to prove the existence and uniqueness of solution of the differential equation of Theorem 1. It may be shown as follows:

The equation together with the initial condition is equivalent to the integral equation

$$\text{(E)} \qquad H(x, x) = b + \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F[t, H(x, t)]\, dt$$

where $H(x, t) = (x-a)^{1-\alpha} y(t)$ and $F[t, H(x, t)] = (x-a)^{1-\alpha} f[t, y(t)]$. Thus the existence and uniqueness of solution of (E) imply the the existence and uniqueness of solution of the equation of Theorem 1.

Since $f[t, y(t)] \in (C, \mathrm{Lip})$, $F[t, H(x, t)] \in (C, \mathrm{Lip})$, as we have

$$\begin{aligned} | F(t, H_1) - F(t, H_2) | &= | (x-a)^{1-\alpha} | \; |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \\ &\leqq A \, | (x-a)^{1-\alpha} y_1 - (x-a)^{1-\alpha} y_2 | \\ &\leqq A \, | H_1 - H_2 |, \end{aligned}$$

and the continuity of F is obvious. Hence there exists $L > 0$ such that $| F(t, H) | \leqq L$ in some region $R' \subset D$ which contains the point (a, b).

Now choose a positive number u such that

1) $(x, y) \in R'$ if $| x - a | \leqq u$, $| H - b | \leqq \dfrac{L u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$

2) $\dfrac{A u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, where A is the Lipschitz constant.

Let X be the space of all continuous functions H which are defined on the closed interval $|x - a| \leqq u$ and are such that $| H(x) - b | \leqq \dfrac{L u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ with the metric

$$d(H_1, H_2) = \max_x | H_1(x) - H_2(x) |.$$

Then X is a complete metric space since it is a closed subset of a complete metric space.

Consider the mapping $TH = h$, where

$$h(x) = b + \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F[t, H(x, t)] \, dt,$$

and $| x - a | \leqq u$.

T maps X into itself, for we have

$$\begin{aligned} | h(x) - b | &= \left| \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(t, H) \, dt \right| \\ &\leqq \frac{L u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Furthermore we have

$$\begin{aligned} | h_1(x) - h_2(x) | &= \left| \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [F(t, H_1) - F(t, H_2)] \, dt \right| \\ &\leqq \frac{A u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \max_x | H_1(x, x) - H_2(x, x) |. \end{aligned}$$

Since $\dfrac{A u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, this shows that T is a contraction mapping on X. It follows therefore that the operator equation $TH = H$ (and consequently equation (E)) has one and only one solution. See [6].

Example 1. Consider the equation

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y^{(\alpha)}(x) = \lambda y, \quad 0 < \alpha \leqq 1,$$

where λ is a number, with the condition $y^{(\alpha-1)}(a) = \eta$.

Let

$$y_0(x) = \eta \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Then from the relation

$$y_n(x) = y_0 + \lambda \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

we find that

$$y_n(x) = \eta \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} \frac{(x-a)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)},$$

and

$$(\mathrm{S}_1) \qquad y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \eta \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \frac{(x-a)^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}$$
$$= \eta E_\alpha(\lambda;\ x-a),$$

which is similar to the solution obtained by J. H. Barrett [1], by solving the equivalent integral equation. This solution is continuous and unique in an interval not containing the point $x = a$, [3, p. 359]. It also satisfies the initial condition, as we have

$$y^{(\alpha-1)}(x) = \eta \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \frac{(x-a)^{\overline{k-1}\alpha}}{\Gamma(\overline{k-1}\alpha+1)}$$

and

$$y^{(\alpha-1)}(a) = \eta.$$

Example 2. Consider the equation

$$(\mathrm{E}_2) \qquad y^{(\alpha)} = x^\alpha y, \quad 0 < \alpha \leqq 1,$$

with the condition $y^{(\alpha-1)}(0) = b$.

To find the solution which satisfies the equation and the initial condition, let $y_0(x) = b\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. Then we have

$$y_n(x) = b\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma(4\alpha)\cdots\Gamma(2k\alpha)\, x^{\overline{2k+1}\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(3\alpha)\cdots\Gamma(\overline{2k+1}\alpha)}$$

and

$$(\mathrm{S}_2) \qquad y(x) = \frac{bx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2\alpha)\cdots\Gamma(2k\alpha)\, x^{\overline{2k+1}\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(3\alpha)\cdots\Gamma(\overline{2k+1}\alpha)}.$$

This may also be written as

$$(\mathrm{S}_2) \qquad y(x) = b\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B(\alpha, 2\alpha)\cdots B(\alpha, 2k\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^{k+1}}\, x^{\overline{2k+1}\alpha-1}$$

where B is the Beta-function. The series in (S_2) is uniformly convergent in any finite interval not containing the origin. Also, it can be easily shown that the solution satisfies equation (E_2) together with the initial condition.

Examples with nonlinear cases can also be shown in a similar way.

Theorem 2. *If $f(x, y) \in (C, \mathrm{Lip})$ on a domain D of the (xy)-plane and*

$$\sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)| = M < \infty,$$

then there exists a unique and continuous solution $y = y(x)$ which satisfies the differential equation

$$y^{(\alpha)} = f(x, y), \quad n - 1 < \alpha \leqq n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

together with the initial condition $y^{(\alpha-j)}(a) = \eta_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, in the region $R_n < D$ defined by

$$a < x \leqq a + h, \ |(x - a)^{n-\alpha} y(x) - b_n| \leqq k,$$

where $b_n = \dfrac{\eta_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)}$, $\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{h^{n-i}\eta_i}{\Gamma(\alpha - i + 1)} < k$ *and* $\eta_0 = M$.

Proof. In this case the sequence $\{y_n\}_0^\infty$ may be defined as follows:

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i (x - a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha - i + 1)},$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_a^x \frac{(x - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

The proof is similar to that of Theorem 1.

Remark. When $\alpha = n$ (a positive integer), Theorem 2 represents the well known existence and uniqueness theorem of the differential system:

$$y^{(n)} = f(x, y)$$
$$y^{(n-j)}(a) = \eta_j, \ (j = 1, 2, \ldots, n), \ y^{(0)}(a) = y(a),$$

in the region defined by: $|x - a| \leqq h$, $|y(x) - b_n| \leqq k$; where

$$b_n = \eta_n, \quad \left\{ \sum_{r=1}^{n} \eta_{n-r} \frac{h^r}{\Gamma(r + 1)} \right\} < k \text{ and } \eta_0 = M \geqq |f(x, y)|.$$

Theorem 3. *With the hypothesis of Theorem 1, suppose that $y = Y(x)$ is the solution for which $Y^{(\alpha-1)}(a) = \eta + \delta$. Then for $a < x \leqq a + h$, $\delta > 0$,*

$$|Y(x) - y(x)| \leqq \delta E_\alpha(A; |x - a|).$$

Proof. Let

$$Y_n(x) = (\eta + \delta) \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_a^x \frac{(x - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f[t, Y_{n-1}(t)]\, dt,$$

and

$$y_n(x) = \eta \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_a^x \frac{(x - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt,$$

with $Y_0(x) = (\eta + \delta) \dfrac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $y_0(x) = \eta \dfrac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ and $(n = 1, 2, \ldots)$. Then we have

$$|Y_n(x) - y_n(x)| \leqq \delta \sum_{k=0}^{n} A^k \frac{|(x - a)^{\overline{k+1}\alpha-1}|}{\Gamma(\overline{k + 1}\,\alpha)} \leqq \delta E_\alpha(A; |x - a|).$$

Let $n \to \infty$ and the theorem is proved.

This implies that a small change in the initial conditions may cause only a small change in the solution throughout the interval.

Theorem 4. *Let $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, be real-valued and continuous functions on a domain D of the real space $(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Let $f_i \in$ (Lip) with respect to $y_1, y_2, \ldots, y_m$, i. e., there exists a positive constant A such that if $(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ and $(x, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ are contained in D then*

$$| f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m) - f_i(x, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m) | \leqq A \sum_{k=1}^{m} | Y_k - Z_k |,$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$. Let $\sup\limits_{\substack{(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \in D \\ (i = 1, 2, \ldots, m)}} | f_i(x, y_1, \ldots, y_m) | = M < \infty$. Then there exists a unique set of continuous solutions $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ which satisfy the differential equations

$$y_i^{(\alpha)} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \quad 0 < \alpha \leqq 1,$$

together with the initial conditions $y_i^{(\alpha-1)}(a) = \eta_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, on the set $R < D$ defined by

$$a < x \leqq a + h, \quad | (x - a)^{1-\alpha} y_i(x) - b_i | \leqq k,$$

where $k > \dfrac{Mh}{\Gamma(\alpha + 1)}$, $b_i = \dfrac{\eta_i}{\Gamma(\alpha)}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Proof. The proof is similar to that given for Theorem 1. However, we may mention here a brief outline of the proof.

Define the functional sequences $y_{1,n}(x)$, $y_{2,n}(x), \ldots, y_{m,n}(x)$ by the relations:

$$y_{i,n}(x) = y_{i,0} + \int_a^x \frac{(x - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i[t, y_{1,n-1}(t), \ldots, y_{m,n-1}(t)]\, dt,$$

and

$$y_{i,0}(x) = \eta_i \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Then it can be easily shown that

$$| y_{i,n} - y_{i,n-1} | \leqq M (mA)^{n-1} \frac{| (x - a)^{n\alpha} |}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

from which follows the existence, continuity and uniqueness of the set of solutions.

Remark. Theorem 4 can be extended to include the cases $n - 1 < \alpha \leqq n$, in the same way Theorem 1 was generalized by Theorem 2.

Theorem 5. *If $f(x, y, y^{(\alpha)}, y^{(2\alpha)}, \ldots, y^{(\overline{n-1}\alpha)}) \in C$ and is Lipschitzian with respect to $y, y^{(\alpha)}, \ldots, y^{(\overline{n-1}\alpha)}$, in some domain D of the space $(x, y, y^{(\alpha)}, \ldots, y^{(\overline{n-1}\alpha)})$, then there exists an interval of x in which the equation*

$$y^{(n\alpha)} = f(x, y, y^{(\alpha)}, y^{(2\alpha)}, \ldots, y^{(\overline{n-1}\alpha)}), \quad 0 < \alpha \leqq 1,$$

has a unique and continuous solution for which $y^{(k\alpha-1)}(a) = c_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Proof. Let $z_1 = y(x)$. Then the system

$$\begin{aligned} z_1^{(\alpha)} &= z_2, \\ z_2^{(\alpha)} &= z_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1}^{(\alpha)} &= z_n, \\ z_n^{(\alpha)} &= f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

with the conditions $z_i^{(\alpha-1)}(a) = c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, is equivalent to the system given by Theorem 4, and thus the theorem is proved.

Remark. The theorem may be extended to include the cases when $m - 1 < \alpha \leqq m$, $(m = 1, 2, \ldots)$, in a way similar to that described by Theorem 2 as an extension of Theorem 1.

Linear Equations. The definition of linear differential equations of generalized order is used here in the same sense of that adopted for the differential equations of integer-order.

According to Theorem 4, the system

$$\begin{aligned} y_i^{(\alpha)}(x) &= \sum_{j=1}^{m} p_{ij} y_j + q_i, \quad 0 < \alpha \leqq 1, \\ y_i^{(\alpha-1)}(a) &= \eta_i, \end{aligned}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$, where p_{ij} and q_i are continuous functions of x in an interval (a, b), has a unique set of continuous solutions $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$. Also we have the following

Theorem 6. *If $p_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and $F(x)$ are continuous functions of x in an interval (a, b), $p_0(x) \neq 0$, then the differential equation*

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, y^{(\overline{n-i}\alpha)}(x) = F(x), \quad 0 < \alpha \leqq 1,$$

where $y^{(0)}(x) = y(x)$, admits of a unique and continuous solution in (a, b) which satisfies the initial conditions $y^{(k\alpha-1)}(a) = \eta_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Proof. The proof follows from the above mentioned results of Theorem 4, for the equation is equivalent to the system:

$$\begin{aligned} y^{(\alpha)}(x) &= y_1 \\ y_1^{(\alpha)} &= y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-2}^{(\alpha)} &= y_{n-1} \\ y_{n-1}^{(\alpha)} &= \frac{F(x)}{p_0(x)} - \frac{p_n(x)}{p_0(x)}\, y - \cdots - \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\, y_{n-1}. \end{aligned}$$

Remark. It should be noted that Theorem 6 may be extended to include the cases $m - 1 < \alpha \leqq m$, $(m = 2, 3, \ldots)$. In such cases the solution satisfies initial conditions of the forms $y^{(j\alpha-k)}(a) = \eta_{jk}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$. This may be illustrated by the following example:

Let us consider the equation

$$y^{(2\alpha)} = v(x), \quad n-1 < \alpha \leqq n.$$

We find that

(1) when $0 < \alpha \leqq 1$, we have

$$y(x) = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{2\alpha} v + \eta_2 \frac{(x-a)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \eta_1 \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

where $y^{(\alpha-1)}(a) = \eta_1$, $y^{(2\alpha-1)}(a) = \eta_2$; and

(2) when $1 < \alpha \leqq 2$, we have

$$y(x) = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{2\alpha} v + \eta_1 \frac{(x-a)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \eta_2 \frac{(x-a)^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}$$
$$+ \xi_1 \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \xi_2 \frac{(x-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)},$$

where $y^{(2\alpha-k)}(a) = \eta_k$ and $y^{(\alpha-k)}(a) = \xi_k$, $(k = 1, 2)$.

In general if $n-1 < \alpha \leqq n$ then we have

$$y(x) = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{2\alpha} v + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{(x-a)^{2\alpha-i}}{\Gamma(2\alpha-i+1)} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)},$$

where $y^{(2\alpha-k)}(a) = \eta_k$, and $y^{(\alpha-k)}(a) = \xi_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

References

[1] *J. H. Barrett*, Differential equations of non-integer order, Canad. J. Math. **6** (1954), 529—541.

[2] *M. A. Bassam* (= *Al-Bassam*), Some properties of Holmgren-Riesz transform, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **15** (1961), 1—24.

[3] *M. A. Bassam*, On functional representation by a certain type of generalized power series, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **16** (1962), 351—366.

[4] *E. A. Coddington* and *N. Levinson*, Theory of Differential Equations, New York 1955.

[5] *H. T. Davis*, The Theory of Linear Operator, Bloomington, Indiana 1936, 268—291.

[6] *G. F. Simmons*, Topology and Modern Analysis, New York 1963, 337—340.

Eingegangen 13. April 1964

Notes on elliptic curves. II

By *B. J. Birch* at Manchester and *H. P. F. Swinnerton-Dyer* at Cambridge

To Gina

§ 1. Introduction

During the past six years, we have made extensive calculations on cubic curves of the form

$$\Gamma: y^2 z = x^3 - A x z^2 - B z^3 \tag{1.1}$$

where A, B are rational integers. In a previous paper [2], we have shown how $\mathcal{A}$, the group of rational points on (1. 1), can conveniently be found on an electronic computer; and we have given extensive tables. In this and subsequent papers, we put forward some conjectures connecting it with other more accessible quantities, together with the numerical evidence on which they are based.

We begin this paper with a history of our investigations. This may make the rest of the paper more understandable; and it enables us to acknowledge the very considerable help we have obtained from other workers in this field.

After the work of Siegel [19] on quadratic forms, it is natural to look at the product

$$\Pi\, N_p/p, \tag{1.2}$$

where N_p is the number of rational points on the curve defined by (1. 1) over the finite field of p elements. Write for convenience

$$f(P) = \Pi\, N_p/p \text{ over all } p \leqq P.$$

In the autumn of 1958 we calculated, for a number of curves (1. 1), the behaviour of $f(P)$ as P increased. It turned out that the rate of increase of $f(P)$ was fairly closely correlated with the number of generators of infinite order of $\mathcal{A}$; and there was some tendency for $f(P)$ to be large when the generators of $\mathcal{A}$ (or more precisely the corresponding values of x, y, z) were small. We were in fact able to predict the number of generators of $\mathcal{A}$ for specific curves Γ, with fairly consistent success, by examining the values of $f(P)$.

Since the behaviour of $f(P)$ as $P \to \infty$ is at least formally linked to the behaviour of $\zeta_\Gamma(s)$ near $s = 1$ (see § 2 below), we were led to make the two linked conjectures:

(A) *If g is the number of generators of $\mathcal{A}$ of infinite order, then $f(P) \sim C (\log P)^g$ as $P \to \infty$, and $\zeta_\Gamma(s) \sim C'(s-1)^{g-1}$ as $s \to 1$, for some constants C, C' depending on Γ.*

At this point we ran into difficulties. The value of $f(P)$ oscillates vigorously as P increases, and there seems little hope of being able to find the constant C by this method

with an error of less than say $10^0/_0$. (It takes $O(p)$ operations to calculate N_p, so we cannot let P become very big without spending an unreasonable amount of time.) Moreover, the terms of the product (1. 2) corresponding to primes p dividing $6(4A^3 - 27B^2)$ are almost certainly the wrong ones; and it was not then known what the right ones were. Thus, even if we had been able to find the value of C for a particular curve Γ, there would have been little prospect of identifying it; this difficulty has since been removed by the work of Tamagawa [23]; see § 7 and later on in this introduction. We hope to return to these direct calculations in a subsequent note.

For those curves Γ which admit complex multiplication an alternative approach is possible; for in this case it is known that $\zeta_\Gamma(s)$ can be expressed in terms of the Riemann zeta function $\zeta(s)$ and Hecke L-series. In particular, for the curve

$$\Gamma = \Gamma_D\colon y^2 z = x^3 - Dxz^2 \tag{1. 3}$$

(to which we confine ourselves for the rest of this paper) we have

$$\zeta_\Gamma(s) = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-1)}{L_D(s)} \tag{1. 4}$$

where $L_D(s)$ is the Hecke L-series defined by (2. 7) below. Formally, $L_D(1) = \Pi(N_p/p)^{-1}$. In the summer of 1960 we found an approximation to $L_D(1)$ as a multiple of a reasonably rapidly convergent series. In this way we were able with fair confidence to determine whether $L_D(1)$ vanished or not; and obtained a good deal of evidence for the conjecture

$$L_D(1) = 0 \quad \textit{if and only if } g > 0, \tag{1. 5}$$

which is a weaker form of conjecture (A) above. However, when $g = 0$ we were still not able to calculate $L_D(1)$ accurately enough to be able to interpret it.

At this point Davenport came to our rescue, by suggesting that it should be possible to express $L_D(1)$ in finite form in terms of division values of the Weierstrass $\wp$-function defined by the equation

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 4\wp.$$

The details of this transformation are given in § 3 below. Exact (algebraic) evaluation of the formulae given there in a few simple cases — together with a remark of Kneser that 'the answer should be an integer' — suggested that

$$L_D(1) = \begin{cases} D^{-\frac{1}{4}} \cdot \omega \cdot \sigma(D) \text{ for } D > 0, \\ (-4D)^{-\frac{1}{4}} \cdot \omega \cdot \sigma(D) \text{ for } D < 0, \end{cases} \tag{1. 6}$$

where ω is the real period of $\wp(u)$ and $\sigma(D)$ is in general a small positive integer. We prove in § 4, by means of class field theory, that $\sigma(D)$ is in general a rational integer; but we can prove nothing about its sign. Using *EDSAC* II, we calculated $\sigma(D)$ from these formulae in a large number of cases, obtaining the results given in Table 1.

To compare these results with our conjecture (1. 5) we needed to be able to find the corresponding values of g. For large D the methods of our previous paper proved too slow and we had to use a method tailored to our special curve (1. 3). This is described in § 5: we do not regard it as novel, but have to describe it at length in the absence of any satisfactory reference. All the results we have obtained are compatible with (1. 5); but there are many curves for which we were not able to find the value of g.

The rest of this paper is concerned with the interpretation of the integer $\sigma(D)$ when it does not vanish. We hoped from the beginning that this would turn out to be

essentially the order of the Tate-Šafarevič group of Γ_D (for a concise popular exposition, see for instance Cassels [6]), and this hope was supported by the fact that $\sigma(D)$ was always a power of 2 times a square. (Cassels [5] has shown that if the Tate-Šafarevič group is finite, its order is a square.) But we found it difficult to get the details right; the trouble is that if $p \mid 2D$ then N_p/p is not usually the natural factor to take in (1. 2), and it was not obvious what one should replace it by. Eventually, much helped by prodding from Cassels, we realized that we should replace the product (1. 2) by $\tau(D)$, the Tamagawa number of the curve Γ_D (see [23]). This too is an infinite product, and differs from (1. 2) only in finitely many terms; the details are described in § 6. We conjecture:

(B) *If $g = 0$ then the order of the Tate-Šafarevič group of Γ_D is $\eta^2(D)/\tau(D)$, where $\eta(D)$ is the number of rational points on Γ_D.*

We can almost interpret this in terms analogous to Tamagawa's form of Siegel's theorem. For there is a natural group structure on the set of points lying on everywhere locally soluble coverings, and its Tamagawa number is $\tau(D)$ times the order of the Tate-Šafarevič group — in other words, $\eta^2(D)$ according to our conjecture. That the factor involved should be the square of the number of rational points rather than the number of rational points seems a little odd; subsequently, this has been partly explained by Cassels [7].

The tangible evidence for our conjecture (B) is not great, for unfortunately little is known about the Tate-Šafarevič group — indeed there is not even any case in which it has been proved to be finite. We have never computed more than its 2-component: in every numerical case this at any rate has the order suggested by the conjecture. The labour involved in finding any other component appears to us prohibitive. We note that in our tables $\tau(D)$ is always a perfect square, as it must be in order to be consistent with Cassels' work. But at Stockholm we were informed that Šafarevič possessed results which, in view of the values for $\tau(D)$ given in Table 2, seemed inconsistent with our conjectures. Recently, Cassels [7] has given additional evidence which helps to confirm our conjecture; and the analogy with the work of Ono [18] is very striking.

Certain cases of the function field analogue of (A) are known to be true [20]. In particular, Mumford has shown that two elliptic curves over a finite field are isogenous if and only if they have the same number of rational points (in the classical case, and in older language, this must have been known to Weber; see § 113 of his Algebra [21]; see also Manin [26]); he deduced the analogue of (1. 5) for an elliptic curve with coefficients in a finite field k, considered over a function field of genus 1 over k. Tate [27] has given conjectures concerning the zeta function of a variety over a finite field which generalise this analogue, and which he has confirmed in many cases.

In conclusion, we must apologise for our rather considerable delay in publication; we hope that no harm has been done, since fairly detailed accounts of our results have been publicised — in particular, Cassels was kind enough to describe our work in his Stockholm talk [6], and one of the authors has given an account in a lecture delivered in Pasadena [3]. The informed reader will recognise that this introduction is already somewhat dated.

§ 2. The zeta-function of Γ

Suppose that Γ is defined over the rationals by (1. 1), and is a complete non-singular curve of genus 1. For almost all p, the curve defined by (1. 1) over the finite field of p elements retains these properties; and if it contains N_p points defined over this finite

field, its zeta-function is

$$\zeta_{\Gamma,p}(s) = \frac{1 + (N_p - p - 1)\, p^{-s} + p^{1-2s}}{(1 - p^{-s})\,(1 - p^{1-s})}. \tag{2.1}$$

The global zeta-function of Γ is therefore

$$\zeta_\Gamma(s) = \prod_p \zeta_{\Gamma,p}(s) = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-1)}{L_\Gamma(s)}, \tag{2.2}$$

where $\zeta(s)$ is the usual Riemann zeta-function,

$$L_\Gamma(s) = \prod_p \{1 + (N_p - p - 1)\, p^{-s} + p^{1-2s}\}^{-1} \tag{2.3}$$

and finitely many factors in the product may not be the most natural ones. Formally we have

$$L_\Gamma(1) = \Pi\,(N_p/p)^{-1};$$

but for general Γ the product (2.3) is only known to converge in $R(s) > \frac{3}{2}$, and it is not known whether it can be continued analytically outside this region.

If Γ (possibly defined over an algebraic number field) admits complex multiplication, Deuring [9] has shown that $L_\Gamma(s)$ can be analytically continued over the whole plane and satisfies a functional equation. By this means he also found a natural form for the missing factors in (2.3), namely that which makes the functional equation as simple as possible.

For the special curve

$$\Gamma_D\colon y^2 z = x^3 - Dxz^2 \tag{2.4}$$

of this paper, it is simplest to use the known explicit formulae for N_p. For convenience we start by recalling some properties of the quartic residue symbol. Suppose that ν is an odd Gaussian prime and μ any Gaussian integer prime to ν. Then we define the quartic residue symbol $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_4$ to be that power of i which is congruent to

$$\mu^{(N\nu-1)/4} \bmod \nu,$$

where N stands for the norm. This is multiplicative in μ, and we extend it to be multiplicative in ν by the condition

$$\left(\frac{\mu}{\nu_1\nu_2}\right)_4 = \left(\frac{\mu}{\nu_1}\right)_4 \left(\frac{\mu}{\nu_2}\right)_4.$$

We also write $(\mu/\nu)_4 = 0$ when μ, ν are not coprime. The principal properties we shall need are that $(\mu/\nu)_4 = 1$ for μ, ν coprime and real, and the law of reciprocity (see for instance [12]). This latter says that if μ, ν are odd and congruent to 1 mod $(2 + 2i)$ — which can always be achieved by multiplication by a unit — then

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_4 = \pm\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_4$$

where the sign is negative if both μ and ν are congruent to $3 + 2i$ mod 4 and positive otherwise.

Return now to the curve (2.4), and assume for convenience that $p \nmid 2D$. For $p \equiv 3 \pmod 4$ we have simply $N_p = p + 1$. If $p \equiv 1 \pmod 4$ we can factorize it in Gaussian integers

$$p = \pi\bar{\pi} \text{ with } \pi \equiv 1 \pmod{2 + 2i};$$

then (see [8], [22]) we have

$$N_p = p + 1 - \bar{\pi}\left(\frac{D}{\pi}\right)_4 - \pi\left(\frac{D}{\bar{\pi}}\right)_4. \tag{2.5}$$

Putting these results together we obtain

$$\begin{aligned} L_D(s) &= \prod_{p \equiv 3(4)} (1 + p^{1-2s})^{-1} \prod_{p \equiv 1(4)} \left\{1 - \bar{\pi}\left(\frac{D}{\pi}\right)_4 p^{-s} - \pi\left(\frac{D}{\bar{\pi}}\right)_4 p^{-s} + p^{1-2s}\right\}^{-1} \\ &= \prod_{\pi \equiv 1(2+2i)} \left\{1 - \left(\frac{D}{\pi}\right)_4 \frac{\bar{\pi}}{(N\pi)^s}\right\}^{-1}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

where the product is taken over all relevant primes, real or complex, in the Gaussian field $Q(i)$. Note that $L_D(s)$ differs rather trivially from $L_\Gamma(s)$ in that it does not contain factors corresponding to the primes which divide $2D$. Hence finally

$$L_D(s) = \sum_{\sigma \equiv 1(2+2i)} \left(\frac{D}{\sigma}\right)_4 \frac{\bar{\sigma}}{(N\sigma)^s}, \tag{2.7}$$

which is an orthodox Hecke L-series with Größencharakter (see [15]).

Over the rational field, the curve Γ_D is 2-isogenous to

$$\Gamma_{-4D}\colon\ y^2 z = x^3 + 4Dxz^2,$$

the isogeny arising from the rational 2-division point $(0, 0, 1)$ on Γ. It follows that the two curves have the same value of g, the number of generators of infinite order of $\mathcal{A}$; and since $-4 = (1 + i)^4$ they have the same N_p, zeta-functions and L-series. However they need not have the same Tate-Šafarevič group; for examples see [2], § 4.

Even though Γ_D is defined over the rational field Q, from certain points of view its natural field of definition is the Gaussian field $Q(i)$. This is the least field over which the complex multiplication on Γ_D is defined; and it is the field of definition of the quartic residue symbol. Over $Q(i)$, Γ_D is birationally equivalent to Γ_{-4D} instead of merely isogenous. Suppose that $\mathcal{A}_i$ is the group of points on Γ_D defined over $Q(i)$, where we still assume D to be rational. In virtue of the complex multiplication on Γ_D, we can regard $\mathcal{A}_i$ as a $Z(i)$-module; and it then has as many generators of infinite order as does $\mathcal{A}$ regarded as a Z-module. We prove no relations between the various Tate-Šafarevič groups involved, though some are implicit in our conjectures; clearly the Tate-Šafarevič groups of Γ_D and Γ_{-4D} can only differ in their 2-components.

It remains to consider the zeta-function of Γ over $Q(i)$; and here it costs nothing to take D to be a Gaussian integer. If $p \equiv 3 \pmod 4$ is a rational prime then

$$N_p = p^2 + 1 + p\left(\frac{D}{p}\right)_4 + p\left(\frac{\bar{D}}{p}\right)_4;$$

if $\pi \equiv 1 \pmod{2 + 2i}$ is a complex prime then

$$N_\pi = \pi\bar{\pi} + 1 - \bar{\pi}\left(\frac{D}{\pi}\right)_4 - \pi\left(\frac{\bar{D}}{\bar{\pi}}\right)_4.$$

Arguing in much the same way as before, we find

$$\zeta_{\Gamma, Q(i)}(s) = \frac{\zeta_{Q(i)}(s)\,\zeta_{Q(i)}(s-1)}{L_D(s)\,L_{\bar{D}}(s)}$$

where $\zeta_{Q(i)}(s)$ is the zeta-function of the field $Q(i)$ and $L_D(s)$ is still defined by (2.7). Thus in particular, when D is a rational integer $\zeta_{\Gamma, Q(i)}(s)$ can easily be written in terms of $\zeta_\Gamma(s)$ and of well-known functions not involving Γ.

§ 3. Formulae for $L_D(1)$

We have now to derive from (2. 7) an expression for $L_D(s)$ which can be analytically continued as far as $s = 1$ and is such that $L_D(1)$ can be written in finite form. Since the extra generality costs us nothing, we shall assume only that D is a Gaussian integer; however, the important case is when D is rational. We may also assume that D is fourth-power free; for multiplying D by a fourth power only changes finitely many factors in (2. 6), and changes those in an obvious way.

We write $D = EF$, where $E \equiv 1 \bmod (2+2i)$ and F is the product of a power of $1+i$ and a unit; and we define Δ to be the product of the distinct primes dividing E, normalized so that $\Delta \equiv 1 \bmod (2+2i)$. If D is real, so are E, F and Δ. For convenience we also write $\varepsilon = (-1/E)_4$, so that $\varepsilon = +1$ if $E \equiv 1 \bmod 4$ and $\varepsilon = -1$ if $E \equiv 3+2i \bmod 4$. Remembering that $\sigma \equiv 1 \bmod (2+2i)$ where σ is the variable of summation in (2. 7), and using the law of quartic reciprocity, we have

$$\left(\frac{D}{\sigma}\right)_4 = \left(\frac{E}{\sigma}\right)_4 \left(\frac{F}{\sigma}\right)_4 = \left(\frac{\sigma}{E}\right)_4 \left(\frac{\varepsilon F}{\sigma}\right)_4. \tag{3. 1}$$

Here the first factor on the right only depends on the residue class of σ modulo Δ, and the second factor on the class of σ modulo 16. Let K be such that $(2+2i) \mid K$, that $K \mid 16$ and that $(\varepsilon F/\sigma)_4$ depends only on the residue class of σ modulo K. (We could take $K = 16$ always, but a smaller value of K reduces the complexity of some of the later formulae and so also the time taken in computation. We may for instance take $K = 8$ if F is real, and $K = 4$ if $F = \pm 1$.)

Now let B be a set of representatives for the residue classes modulo Δ, and let C be a set of representatives for those residue classes mod K which are congruent to $1 \bmod (2+2i)$. We can write

$$\sigma = K\Delta\mu + K\beta + \Delta\gamma$$

where μ is a Gaussian integer, $\beta \in B$ and $\gamma \in C$; and we can replace any sum over σ by a triple sum over μ, β and γ. For convenience we write $\varrho = K\beta + \Delta\gamma$. It follows that we can rewrite (2. 7) in the form

$$L_D(s) = \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \sum_{\mu} \frac{\bar{K}\bar{\Delta}\bar{\mu} + \bar{\varrho}}{\{N(K\Delta\mu + \varrho)\}^s} \tag{3. 2}$$

in which provided $E \neq 1$ we have

$$\left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 = \left(\frac{K}{E}\right)_4 \left(\frac{\varepsilon F}{\Delta}\right)_4 \left(\frac{\beta}{E}\right)_4 \left(\frac{\varepsilon F}{\gamma}\right)_4. \tag{3. 3}$$

We have next to find a more convenient expression for the inner sum in (3. 2). For α not a Gaussian integer, we write

$$\psi(\alpha, s) = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^{2s}} + \sum_{\mu \neq 0} \left\{ \frac{\bar{\alpha} + \bar{\mu}}{|\alpha + \mu|^{2s}} - \frac{\bar{\mu}}{|\mu|^{2s}} \left(1 - \frac{s\alpha}{\mu} + \frac{\bar{\alpha}(1-s)}{\bar{\mu}}\right)\right\}. \tag{3. 4}$$

Since the expression in curly brackets is $O(\mu^{-2s-1})$, this defines an analytic function of s in $R(s) > \frac{1}{2}$; and since the series is uniformly convergent near $s = 1$ we have

$$\psi(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{\mu \neq 0} \left\{ \frac{1}{\mu + \alpha} - \frac{1}{\mu} + \frac{\alpha}{\mu^2} \right\} = \xi(\alpha)$$

where ξ is the Weierstrass zeta-function with periods $1, i$. On the other hand, if $R(s)$ is large we can rearrange the terms in (3. 4) to give

$$\sum_{\mu} \frac{\bar{\alpha}+\bar{\mu}}{|\alpha+\mu|^{2s}} = \psi(\alpha, s) + \bar{\alpha}(1-s) \sum_{\mu \neq 0} \frac{1}{(N\mu)^s}$$
$$= \psi(\alpha, s) + 4\bar{\alpha}(1-s)\, \zeta_{Q(i)}(s);$$

for the other sums vanish on combining the terms arising from $\pm\mu$, $\pm i\mu$. This provides an analytic continuation of the left hand side. Substituting into (3. 2) we obtain

$$L_D(s) = \frac{\bar{K}\bar{\Delta}}{\{N(K\Delta)\}^s} \left\{ \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \psi\left(\frac{\varrho}{K\Delta}, s\right) + 4(1-s)\, \zeta_{Q(i)}(s) \sum_{\beta,\gamma} \frac{\bar{\varrho}}{\bar{K}\bar{\Delta}} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \right\}.$$

In particular, since $(s-1)\, \zeta_{Q(i)}(s) \to \frac{1}{4}\pi$ as $s \to 1$, we have

$$L_D(1) = \frac{1}{K\Delta} \sum \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \xi\left(\frac{\varrho}{K\Delta}\right) - \frac{\pi}{N(K\Delta)} \sum \bar{\varrho} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4. \tag{3. 5}$$

Since this expression does not depend on the particular choice of representatives ϱ of the residue classes mod $K\Delta$, we see that

$$\xi(u+1) = \xi(u) + \pi, \quad \xi(u+i) = \xi(u) - \pi i.$$

In particular, since ξ is odd it follows that

$$\xi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi, \quad \xi\left(\frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2}\pi i. \tag{3. 6}$$

Provided that $E \neq 1$, we can express the right hand side of (3. 5) in terms of the Weierstrass $\wp$-function. In order to simplify the algebra later, it is convenient to make a change of period. Throughout this paper, we shall therefore denote by $\wp(u)$ the Weierstrass $\wp$-function with periods ω, $i\omega$, where

$$\omega = 2^{\frac{1}{2}} \pi e^{-\frac{\pi}{6}} \Pi (1 - e^{-2\pi n})^2 = 2.6220575\ldots$$

has been chosen so that $\wp(u)$ satisfies the equation

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 4\wp. \tag{3. 7}$$

The Weierstrass $\wp$-function with periods $1, i$ is therefore $\omega^2\wp(\omega u)$; and (see [25]) we can write the addition formula for $\xi(u)$ in the form

$$\xi(u+v) = \xi(u) + \xi(v) + \omega \cdot \frac{\wp'(\omega u) - \wp'(\omega v)}{2\{\wp(\omega u) - \wp(\omega v)\}}. \tag{3. 8}$$

In this we write $u = \gamma/K$, $v = \beta/k$, giving an expression for $\xi(\varrho/K\Delta)$ in terms of functions with simpler arguments. If we substitute the resulting values in (3. 5) and add to this the equation derived by writing $-\beta$ for β throughout, many of the terms cancel. In view of the shape of (3. 3), we split cases on the value of $\varepsilon = (-1/E)_4$.

If $\varepsilon = +1$, then $(D/\varrho)_4$ is not affected by replacing β by $-\beta$ and so we obtain

$$L_D(1) = \frac{1}{K\Delta} \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \left\{ \xi\left(\frac{\gamma}{K}\right) - \frac{\pi\bar{\gamma}}{\bar{K}} \right\} + \frac{\omega}{2K\Delta} \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \frac{\wp'(\gamma\omega/K)}{\wp(\gamma\omega/K) - \wp(\beta\omega/\Delta)}.$$

In the first term on the right, the sum over β is effectively $\Sigma(\beta/E)_4 = 0$, since E is not a fourth power; hence this term vanishes and we have

$$L_D(1) = \frac{\omega}{2K\Delta} \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \frac{\wp'(\gamma\omega/K)}{\wp(\gamma\omega/K) - \wp(\beta\omega/\Delta)}. \tag{3.9}$$

If $\varepsilon = -1$, replacing β by $-\beta$ changes the sign of $(D/\varrho)_4$ and we therefore obtain

$$L_D(1) = \frac{1}{K\Delta} \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \left\{\xi\left(\frac{\beta}{\Delta}\right) - \frac{\pi\bar{\beta}}{\bar{\Delta}}\right\} - \frac{\omega}{2k\Delta} \sum_{\beta,\gamma} \left(\frac{D}{\varrho}\right)_4 \frac{\wp'(\beta\omega/\Delta)}{\wp(\gamma\omega/K) - \wp(\beta\omega/\Delta)}. \tag{3.10}$$

(Here the terms for which $\beta \mid \Delta$ are defined to be zero.) If εF is not an exact fourth power, then the sum over γ in the first term on the right is effectively $\Sigma(\varepsilon F/\gamma)_4 = 0$; hence this term vanishes. If εF is an exact fourth power, the first term on the right of (3. 10) is

$$\frac{\bar{K}}{8\Delta} \sum_{\beta} \left(\frac{\beta k}{E}\right)_4 \left\{\xi\left(\frac{\beta}{\Delta}\right) - \frac{\pi\bar{\beta}}{\bar{\Delta}}\right\} \tag{3.11}$$

since there are $\frac{1}{8} K\bar{K}$ values of γ to sum over. Writing $i\beta$ for β and adding, we see that (3. 11) vanishes if $(i/E)_4 = -i$. If $(i/E)_4 = i$ we can evaluate (3. 11) by writing $(1+i)\beta$ for β and using

$$\xi(u(1+i)) = (1-i)\,\xi(u) + \frac{\omega(1+i)}{4} \frac{\wp'(\omega u)}{\wp(\omega u)}, \tag{3.12}$$

which is a special case of (3. 8). We find that (3. 11) is equal to

$$\frac{\bar{K}\omega}{16\Delta} \left\{1 - i + 2i\left(\frac{1+i}{E}\right)_4\right\}^{-1} \sum_{\beta} \left(\frac{\beta K(1+i)}{E}\right)_4 \frac{\wp'(\beta\omega/\Delta)}{\wp(\beta\omega/\Delta)}.$$

In the excluded cases when $E = 1$, we can evaluate $L_D(1)$ directly from (3. 5); for the values of $\xi(u)$ needed can be obtained from (3. 6) and (3. 12).

For explicit numerical calculation on an electronic computer, it is expedient to carry out the summation over γ algebraically. We assume that D is a rational integer, so that we have $\varepsilon = +1$, and that D is not divisible by a fourth power nor, since $L_{4D}(1) = L_{-D}(1)$, by 4. There are therefore four cases to consider. In each of them we write for convenience $\wp$ for $\wp(\beta\omega/\Delta)$. The sums concerned are taken over all $\beta \in B$; but it is enough to consider the β prime to Δ since the terms with β not prime to Δ each vanish.

Case 1: $D \equiv 1 \bmod 4$. Now we have $E = D$, $F = 1$. If we choose $K = 4$ we obtain for $D \neq 1$,

$$L_D(1) = \frac{\omega}{\Delta} \Sigma \left(\frac{\beta}{D}\right)_4 \frac{\wp}{\wp^2 - 2\wp - 1}. \tag{3.13}$$

Alternatively, we may take $K = 2 + 2i$ and obtain, still for $D \neq 1$,

$$L_D(1) = \frac{i\omega}{2\Delta} \Sigma \left(\frac{\beta(2+2i)}{D}\right)_4 \frac{1}{\wp - i}. \tag{3.14}$$

For the excluded value $D = 1$ we find $L_1(1) = \frac{1}{4}\omega$.

Case 2: $D \equiv 3 \bmod 4$. Now we have $E = -D$, $F = -1$, $K = 4$ and obtain for $D \neq -1$

$$L_D(1) = \frac{\omega}{\Delta\sqrt{2}} \Sigma \left(\frac{\beta}{-D}\right)_4 \frac{\wp + 1}{\wp^2 - 2\wp - 1}. \tag{3.15}$$

For the excluded case $D = -1$ we find $L_{-1}(1) = \frac{1}{4}\omega\sqrt{2}$.

Case 3: $D \equiv 2 \bmod 8$. Now we have $E = \frac{1}{2}D$, $F = 2$, $K = 8$ and obtain for $D \neq 2$

$$L_D(1) = \frac{\omega\sqrt[4]{8}}{\Delta} \Sigma \left(\frac{\beta}{E}\right)_4 \frac{2\wp(\wp^4 - 1)(\wp^2 + 2\wp - 1)}{(\wp^2 - 2\wp - 1)^4 - 32\wp^2(\wp^2 - 1)^2}. \tag{3.16}$$

For the excluded case $D = 2$ we find $L_2(1) = 0$.

Case 4: $D \equiv 6 \bmod 8$. Now we have $E = -\frac{1}{2}D$, $F = 2$, $K = 8$ and obtain for $D \neq -2$

$$L_D(1) = \frac{\omega\sqrt[4]{2}}{\Delta} \Sigma \left(\frac{\beta}{E}\right)_4 \frac{(\wp - 1)\{2(\wp^2 + 1)^3 + (\wp^2 + 2\wp - 1)^3\}}{(\wp^2 - 2\wp - 1)^4 - 32\wp^2(\wp^2 - 1)^2}. \tag{3.17}$$

For the excluded case $D = -2$ we find $L_{-2}(1) = \frac{1}{2}\omega\sqrt[4]{2}$.

§ 4. Proof of integrity

It is well known [21] that the division values of $\wp$ and $\wp'$ are in general algebraic functions of g_2 and g_3, and so in our particular case algebraic numbers. It follows from the results of § 3 that $\omega^{-1}L_D(1)$ is an algebraic number; in this section we consider how nearly it is a rational integer. We deal only with the case when D is rational: but similar arguments could be used in the Gaussian case. Our object is to prove

Theorem 1. *Let $D > 1$ be a positive integer, fourth power free and not divisible by 4. Then*

$$\frac{D^{\frac{1}{4}}L_D(1)}{\omega} \quad \textit{and} \quad \frac{(4D)^{\frac{1}{4}}L_{-D}(1)}{\omega}$$

are rational integers.

The theorem holds for $D = 2$, from the explicit values given at the end of § 3. Setting aside this case, we may therefore make use of (3. 9) and its consequences (3. 13) to (3. 17). The proof of the theorem now falls into two parts. The first part (Lemmas 1—5) is concerned with integrity and is entirely elementary; the second is concerned with rationality and makes use of results from classical class field theory.

For convenience, in dealing with algebraic integers, we shall use 'odd' to mean prime to 2, and 'even' to mean not odd.

Lemma 1. *Let α be an odd Gaussian integer. Then*

$$\wp(\alpha u) = P_\alpha(\wp(u))/Q_\alpha^2(\wp(u)),$$

where P_α, Q_α are polynomials of degrees $\alpha\bar{\alpha}$, $\frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha} - 1)$ respectively with Gaussian integer coefficients; P_α has leading coefficient 1 and Q_α has leading coefficient α and constant term ± 1 or $\pm i$.

We know that $\wp(\alpha u)$ is an even doubly-periodic function whose only singularities in the period parallelogram are $\alpha\bar{\alpha}$ double poles at the α-division points. These include the origin but none of the midpoints. It follows, by well-known results on doubly-periodic functions, that we have

$$\wp(\alpha u) = P_\alpha(\wp(u))/Q_\alpha^2(\wp(u)),$$

where P_α, Q_α are polynomials of degrees $\alpha\bar{\alpha}$, $\frac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}-1)$ respectively. Moreover, the zeros of Q_α are just the distinct finite values of $\wp(u)$ at the α-division points, while the zeros of P_α are the values of $\wp(u)$ at those $(1+i)\,\alpha$-division points that are not α-division points, taken with their correct multiplicity.

We now normalize so that Q_α has leading coefficient α. Since for small u we have

$$\wp(u) \sim u^{-2},\ \wp(\alpha u) \sim \alpha^{-2}u^{-2},$$

it follows that P_α has leading coefficient 1. We shall prove the remaining statements in the lemma by induction on the value of $\alpha\bar{\alpha}$, since they obviously hold when α is a unit. In the identity

$$\wp(v+w)\,\wp(v-w) = \left\{\frac{\wp(v)\,\wp(w)+1}{\wp(v)-\wp(w)}\right\}^2 \tag{4.1}$$

we write $v = \alpha u$, $w = (1+i)\,u$. Since

$$\wp(u(1+i)) = \frac{\wp^2(u)-1}{2i\wp(u)} \tag{4.2}$$

we deduce

$$\frac{P_{\alpha+1+i}\,P_{\alpha-1-i}}{Q^2_{\alpha+1+i}Q^2_{\alpha-1-i}} = \left\{\frac{(\wp^2-1)\,P_\alpha + 2i\wp Q_\alpha^2}{(\wp^2-1)\,Q_\alpha^2 - 2i\wp\,P_\alpha}\right\}^2.$$

Here the left hand side is in its lowest terms; for from the results above no P can have a zero in common with a Q. But the numerator and denominator on the right have (after squaring) the same degrees and leading coefficients as those on the left. Hence they are equal, giving

$$P_{\alpha+1+i}\,P_{\alpha-1-i} = \{(\wp^2-1)\,P_\alpha + 2i\wp Q_\alpha^2\}^2,$$
$$Q_{\alpha+1+i}Q_{\alpha-1-i} = (\wp^2-1)\,Q_\alpha^2 - 2i\wp\,P_\alpha.$$

We have also the similar results obtained by writing $-i$ for i. Now therefore, if $\eta = 1$, -1, i or $-i$ and if the assertions of the lemma hold for $\alpha-\eta(1+i)$ and for $\alpha-2\eta(1+i)$, then they hold for α. But it is geometrically obvious that if α is an odd integer not a unit then we can always choose η so that both $\alpha-\eta(1+i)$ and $\alpha-2\eta(1+i)$ are strictly smaller than α. The truth of the lemma now follows by induction.

Lemma 2. *Let Δ be an odd square-free Gaussian integer, not a unit; and let β be a Gaussian integer prime to Δ. Let*

$$\varphi(\Delta) = \begin{cases} \Delta^{2/(\Delta\bar{\Delta}-1)} & \textit{if } \Delta \textit{ is prime,} \\ 1 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Then $\varphi(\Delta)\,\wp(\beta\omega/\Delta)$ is an algebraic unit.

Suppose first that Δ is prime. Then the $\wp(\beta\omega/\Delta)$ are just the roots of $Q_\Delta(x) = 0$. Moreover they all generate the same field K over $Q(i)$; for given any β_1, β_2 prime to Δ we can find an odd α such that $\beta_2 \equiv \alpha\beta_1 \bmod \Delta$, and so

$$\wp(\beta_2\omega/\Delta) = \wp(\alpha\beta_1\omega/\Delta)$$

is a rational function of $\wp(\beta_1\omega/\Delta)$ over $Q(i)$, by Lemma 1. Since they are the roots of $Q_\Delta(x) = 0$, the $\wp(\beta\omega/\Delta)$ each have numerator a unit and denominator a factor of Δ; and not all of them are integers. Let $\mathfrak{q}$ be a prime ideal in K which divides the denominator of $\wp(\beta_1\omega/\Delta)$ to exactly the rth power, where $r > 0$. For any β_2 prime to Δ we define α as before. Then α is prime to $\mathfrak{q}$ and hence, using Lemma 1 again, $\mathfrak{q}$ divides the denominator of

$$\wp(\beta_2\omega/\Delta) = P_\alpha(\wp(\beta_1\omega/\Delta))/Q_\alpha^2(\wp((\beta_1\omega/\Delta))$$

to exactly the rth power. It follows that all the $\wp(\beta\omega/\Delta)$ must have the same denominator, up to a unit; and hence this must be $\varphi(\Delta)$, for there are $\frac{1}{2}(\Delta\bar{\Delta}-1)$ such denominators and their product is Δ.

Now suppose that $\Delta = \Delta_1\Delta_2$, where Δ_1 and Δ_2 are coprime and not units. Then $\wp(\beta\omega/\Delta)$ is a zero of $Q_\Delta/Q_{\Delta_1}Q_{\Delta_2}$, which has integer coefficients the first and last of which are units. Hence $\wp(\beta\omega/\Delta)$ is itself a unit. This completes the proof of the lemma.

Lemma 3. *Let γ_1, γ_2 be odd Gaussian integers, γ_2 being square-free, and let $r > 1$ be a rational integer. Then $\wp(\gamma_1\omega/\gamma_2(1+i)^r)$ is an algebraic unit.*

Without loss of generality, we may assume γ_1, γ_2 coprime. We first prove that $\wp(\gamma_1\omega/\gamma_2(1+i))$ is an algebraic integer. If γ_2 is a unit, then

$$\wp(\gamma_1\omega/\gamma_2(1+i)) = \wp(\omega/(1+i)) = 0.$$

If not, we have

$$\wp(u)\,\wp(u+\omega/(1+i)) = -1 \tag{4.3}$$

since, after (4. 2), the roots of

$$x^2 - 2ix\wp(u(1+i)) - 1 = 0 \tag{4.4}$$

are $\wp(u)$ and $\wp(u+\omega/(1+i))$. But if we write $u = \gamma_1\omega/\gamma_2(1+i)$ then

$$u + \frac{\omega}{1+i} = \frac{\omega(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_2(1+i)}$$

is an argument to which we can apply Lemma 2, with γ_2 for Δ. This and (4. 3) show that $\wp(\gamma_1\omega/\gamma_2(1+i))$ is $\varphi(\gamma_2)$ times an algebraic unit, and is therefore an algebraic integer.

The lemma now follows by induction on r; for since $\wp(u)$ is a root of (4. 4) we see that $\wp(u)$ is an algebraic unit whenever $\wp(u(1+i))$ is an algebraic integer.

Lemma 4. *Let $r > 0$ be a rational integer; and let β, γ, Δ be Gaussian integers of which Δ is odd, square-free and not a unit, β is prime to Δ and γ is odd. Write $\lambda = 1 - 2^{1-r}$, and define $\varphi(\Delta)$ as in Lemma 2. Then*

$$2^{-\lambda}\varphi(\Delta)\,\{\wp(\beta\omega/\Delta) - \wp(\gamma\omega/(1+i)^r)\}$$

is an algebraic unit.

For $r = 1$ we have $\lambda = 0$, $\wp(\gamma\omega/(1+i)) = 0$, and the result is precisely that of Lemma 2. We now proceed by induction on r. From (4. 2) we have

$$\wp(v(1+i)) - \wp(w(1+i)) = \frac{-i\{\wp(v)-\wp(w)\}\{\wp(v)\,\wp(w)+1\}}{2\wp(v)\,\wp(w)}. \tag{4.5}$$

In this we write $v = \beta\omega/\Delta$, $w = \gamma\omega/(1+i)^r$, and assume the Lemma true for $r-1$. Write for convenience ϑ for an arbitrary algebraic unit, not necessarily the same from one occurrence to the next. By the induction hypothesis we have

$$\wp(v(1+i)) - \wp(w(1+i)) = 2^{2\lambda-1}\vartheta/\varphi(\Delta).$$

By Lemma 3 with $\gamma_2 = 1$ and Lemma 2 we have

$$2\wp(v)\,\wp(w) = 2\vartheta/\varphi(\Delta).$$

By (4. 1) and Lemma 3 with $\gamma_2 = \Delta$ we have

$$\wp(v)\,\wp(w) + 1 = \vartheta\{\wp(v) - \wp(w)\}.$$

Combining these three results with (4. 5) we obtain

$$\{\wp(v) - \wp(w)\}^2 = 2^{2\lambda}\vartheta/\varphi^2(\Delta),$$

and this proves the lemma.

Lemma 5. *Let D be a rational integer, fourth power free and not divisible by 4. If $D \neq \pm 1$ then $2^{\frac{3}{4}}\Delta\omega^{-1}L_D(1)$ is an algebraic integer.*

Here Δ is defined as in § 3. From the actual values of $L_D(1)$ we verify that the Lemma is true for $D = \pm 2$; thus we need only deal with the cases in which one of (3. 13) to (3. 17) hold. As in the proof of Lemma 4 we shall write ϑ for an algebraic unit, which need not be the same from one occurrence to the next. Now, using Lemma 4,

$$\wp^2 - 2\wp - 1 = \left\{\wp - \wp\left(\frac{1}{4}\omega\right)\right\}\left\{\wp - \wp\left(\frac{3}{4}\omega + \frac{1}{2}i\omega\right)\right\} = 2^{\frac{7}{4}}\vartheta/\varphi^2(\Delta)$$

and

$$\wp + 1 = \wp - \wp\left(\frac{1}{2}i\omega\right) = 2^{\frac{1}{2}}\vartheta/\varphi(\Delta).$$

Hence each term on the right of (3. 13) or (3. 15) is of the form $\omega\vartheta\varphi(\Delta)/2^{\frac{7}{4}}\Delta$. But in each of these sums the terms given by β and by $-\beta$ are equal. Hence the right hand sides are $\omega\varphi(\Delta)/2^{\frac{3}{4}}\Delta$ times algebraic integers, and since $\varphi(\Delta)$ is an algebraic integer this proves the lemma in these two cases.

In the cases given by (3. 16) and (3. 17) we argue similarly, using in addition the facts that

$$(\wp^2 - 2\wp - 1)^4 - 32\wp^2(\wp^2 - 1)^2 = 2^{\frac{31}{4}}\vartheta/\varphi^8(\Delta)$$

since the left hand side is the product of eight terms of the form

$$\left\{\wp - \wp\left(\frac{1}{8}\gamma\omega\right)\right\} \text{ with } \gamma \text{ odd};$$

that

$$\wp^2 - 1 = 2\vartheta/\varphi^2(\Delta),$$
$$\wp^2 + 1 = 2^{\frac{3}{2}}\vartheta/\varphi^2(\Delta),$$
$$\wp - 1 = 2^{\frac{1}{2}}\vartheta/\varphi(\Delta)$$

and

$$\wp^2 + 2\wp - 1 = 2^{\frac{7}{4}}\vartheta/\varphi^2(\Delta),$$

all similarly derived from Lemma 4. The rest of the proof goes through exactly as before.

Lemma 5 is the strongest result which we can obtain from elementary divisibility arguments. We now turn to the question of rationality. Here we need to quote classical results of class field theory over $Q(i)$. The relevant part of the Kronecker Jugendtraum (see Fueter [11] or Hasse [13]) is normally stated as follows:

Lemma 6. *Let μ be a Gaussian integer, not a unit. Then the strahlklass field mod μ over $Q(i)$ is generated by $\wp^2(\alpha\omega/\mu)$, where α is any Gaussian integer prime to μ. If this field is K, and if p is any Gaussian prime not dividing μ, then the Artin symbol $\left(\frac{K/Q(i)}{p}\right)$ is the automorphism which takes $\wp^2(\alpha\omega/\mu)$ into $\wp^2(\alpha p\omega/\mu)$.*

The fact that p is only defined up to a power of i is irrelevant; for the value of $\wp^2$ is not changed by multiplying its argument by a power of i. Unfortunately Lemma 6 is not in the most convenient form for us, since it deals with $\wp^2$ rather than with $\wp$. We therefore rephrase the relevant special case of it as follows:

Lemma 7. *Let Δ be an odd square-free Gaussian integer, not a unit. Then the strahlklass field* mod 2Δ *over $Q(i)$ is generated by $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ where α is any Gaussian integer prime to Δ. If this field is K, and if p is any Gaussian prime not dividing 2Δ, normalized so that $p \equiv 1 \bmod 2$, then the Artin symbol $\left(\frac{K/Q(i)}{p}\right)$ is the automorphism which takes $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ into $\wp(\alpha p\omega/\Delta)$.*

Let K be the strahlklass field mod 2Δ over $Q(i)$. Since

$$\wp\left(\frac{\omega(2\alpha+\Delta)}{2\Delta}\right) = \frac{\wp(\alpha\omega/\Delta)+1}{\wp(\alpha\omega/\Delta)-1},$$

the field generated by $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ over $Q(i)$ contains $\wp^2(\beta\omega/2\Delta)$ for some β prime to 2Δ, and so contains K.

To deduce Lemma 7 from Lemma 6, we have still to show that $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ is in K and is correctly transformed by the Artin symbol. Since we can alter α by a multiple of Δ, we may assume that $\alpha \equiv \Delta \bmod 2$. We shall now prove — which is clearly sufficient for our needs — that $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ can be written as a rational function of $\wp^2(\alpha\omega/2\Delta)$, the function being defined over $Q(i)$ and being independent of α.

For any Gaussian integer ν, $\wp(\nu u)$ is a rational function of $\wp(u)$ defined over $Q(i)$; this follows from (4. 2) and Lemma 1. Moreover, it is an odd function; for writing iu for u changes the signs of both $\wp(u)$ and $\wp(\nu u)$. Hence $\wp^2(\nu u)$ is a rational function of $\wp^2(u)$, defined over $Q(i)$. Let $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \Delta)$ and choose ν so that $2 \nmid \nu$ and $\Delta \mid (\nu - 1)$. Then $\wp^2(\gamma\omega/\Delta) = \wp^2(\nu\alpha\omega/2\Delta)$ is a rational function of $\wp^2(\alpha\omega/2\Delta)$, defined over $Q(i)$ and independent of α. Moreover

$$\wp(\alpha\omega/\Delta) = \frac{2\{\wp^2(\alpha\omega/2\Delta)+1\}\{\wp^2(\gamma\omega/\Delta)+1\}}{\{\wp^2(\alpha\omega/2\Delta)-1\}\{\wp^2(\gamma\omega/\Delta)-1\}}.$$

Combining these results, we see that $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ can be written as a rational function of $\wp^2(\alpha\omega/2\Delta)$ defined over $Q(i)$ and independent of α (since ν is so). This completes the deduction of Lemma 7.

Corollary. *Let $R(x)$ be a rational function of x defined over $Q(i)$, and let D be a rational integer. Then with the notation of* § 3,

$$E^{\frac{1}{4}} \Sigma \left(\frac{\beta}{E}\right)_4 R(\wp(\beta\omega/\Delta)) \tag{4. 6}$$

is in $Q(i)$.

For let K be defined as in the proof of the Lemma. Then $E^{\frac{1}{4}}$ is in K; for if p prime to $2E$ is a Gaussian prime it splits in $Q(i, E^{\frac{1}{4}})/Q(i)$ if and only if $(E/p)_4 = 1$; and this depends only on the residue class of p modulo 2Δ, by the quartic reciprocity law and the rationality of E. Moreover, the general automorphism of $K/Q(i)$ is that which takes $\wp(\alpha\omega/\Delta)$ into $\wp(\lambda\alpha\omega/\Delta)$ for each α, where λ is prime to Δ and $\lambda \equiv 1 \bmod 2$. By the identification of the Artin symbol in Lemma 7, this also takes $E^{\frac{1}{4}}$ into $(\lambda/E)_4 E^{\frac{1}{4}}$, and hence merely permutes the terms of (4. 6). Thus this expression, being unchanged by each automorphism of $K/Q(i)$, must be in $Q(i)$; and this proves the Corollary.

We can now return to the proof of Theorem 1. Let D be a rational integer, fourth power free and not divisible by 4, but not necessarily positive, and suppose $|D| > 2$. Then one of (3. 13), (3. 15), (3. 16) or (3. 17) is valid. It follows that $L_D(1)$ is real; for the set B over which the sum is taken may be made to consist of real numbers and complex conjugate pairs. Moreover $D^{\frac{1}{4}}\omega^{-1}L_D(1)$ is in $Q(i)$, by the Corollary to Lemma 7. Since $-4 = (1+i)^4$, it follows that the two expressions in the Theorem are rational numbers. But by Lemma 5 they are algebraic numbers whose denominator is at most $(2\Delta)^{\frac{3}{4}}$. Since the only rational integers which divide this are ± 1, it follows that the expressions in Theorem 1 are rational integers. This proves the Theorem.

§ 5. Estimation of g

In order to produce Table 1 below, we need also a method of estimating g, the number of independent generators of infinite order of $\mathcal{A}$, the group of rational points on Γ_D. We cannot do this by the methods of our previous paper, since they would be intolerably slow when D is large. Instead, we use the fact that multiplication by 2 can be written as a product of isogenies. The arguments involved are well known, though we cannot find them explicitly in the literature (compare the theses of Billing [1] and Lind [17]): we have stated them in unusually pompous form to be able to use the analogy with the work of Cassels [5].

We extend the definition of ν-covering to the case where $\nu\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ is an isogeny of elliptic curves instead of an endomorphism. We assume that ν is defined over the rationals and is an n to 1 mapping; and we write $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_1$ for the zeros of $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ considered as Abelian groups. There is an isogeny $\nu_1\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ such that the composite maps $\nu\nu_1$ and $\nu_1\nu$ are multiplication by n on $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ respectively; and ν_1 is also defined over the rationals. We say that there is a ν-covering of $\mathcal{C}$ if there is a curve $\mathcal{D}$ defined over the rationals and a commutative triangle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{C} \\ \mathcal{D} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

with associated generic points

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & x = \nu x_1 \\ X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

where $X \to x$ is over the rationals and $X \leftrightarrow x_1$ over the complex numbers. Another curve $\mathcal{D}'$ and its associated mappings give the same ν-covering if and only if there

is a birational mapping $X \leftrightarrow X'$ over the rationals and a point $\mathfrak{d}_1$ on $\mathcal{C}_1$ with $\nu\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{o}$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftrightarrow & x_1 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ X' & \longleftrightarrow & x_1' = x_1 + \mathfrak{d}_1 \end{array} \tag{5. 1}$$

is commutative. There is a natural law of composition of ν-coverings inherited from the law of composition of homogeneous spaces over $\mathcal{C}_1$; and under it they form an Abelian group. We are interested in two subgroups: G_ν, the group of those coverings for which $\mathcal{D}$ has a point in every p-adic field including the reals, and G'_ν, the group of those coverings for which $\mathcal{D}$ actually has a rational point. If $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ are the groups of rational points on $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ respectively, then G'_ν is isomorphic to $\mathcal{A}/\nu\mathcal{A}_1$.

For convenience of notation, when we use n as an endomorphism it will always refer to the map $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Now we have $n = \nu_1\nu$ and so, using square brackets for the order of groups,

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}/n\mathcal{A}] &= \frac{[\mathcal{A}/\nu\mathcal{A}_1]\,[\mathcal{A}_1/\nu_1\mathcal{A}]}{\text{Number of cosets of } \nu_1\mathcal{A} \text{ in } \mathcal{A}_1 \text{ which meet } \nu^{-1}\mathfrak{o}} \\ &= \frac{[G'_{\nu_1}]\,[G'_\nu]}{[\mathcal{A} \cap \nu_1^{-1}\mathfrak{o}_1]\,[\mathcal{A}_1 \cap \nu^{-1}\mathfrak{o}]/[\mathcal{A} \cap n^{-1}\mathfrak{o}]}. \end{aligned} \tag{5. 2}$$

Here the denominator only depends on the rational n-division points on $\mathcal{C}$, and so can easily be calculated.

We can obtain this result, and somewhat more, by a different argument. Suppose that $\mathcal{D}$ represents an n-covering of $\mathcal{C}$; then we can find $\mathcal{D}_1$ so that the extended diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\nu_1} & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{C} \\ \updownarrow & & \updownarrow & \nearrow & \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D}_1 & & \end{array} \tag{5. 3}$$

is commutative. Here $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}$ are defined over the rationals, and $\mathcal{C}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_1$ is over the complex numbers. For let X be a generic point on $\mathcal{D}$ and let $\varphi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}_1$ be the map (over the complex numbers) defined in the obvious way. The support of $\varphi^{-1}\{\varphi(X)\}$ is a divisor defined over $Q(X)$. Let its exact field of definition be $Q(X_1)$; then we may define $\mathcal{D}_1$ as the curve whose generic point is X_1, and now the assertions above are obvious.

The right-hand part of the last diagram provides a ν-covering of $\mathcal{C}$; and it is easy to show that this depends only on the original n-covering and not on its realisation. Moreover, this process is compatible with the law of composition of coverings. Thus we have homomorphisms $G_n \to G_\nu$ and $G'_n \to G'_\nu$; and the second of these is onto since any $\mathcal{D}_1$ which contains a rational point can be lifted back to a $\mathcal{D}$.

We now find the kernels of these mappings. If $\mathcal{D}$ is in the kernel of $G_n \to G_\nu$, then we may take $\mathcal{D}_1$ in (5. 3) to be $\mathcal{C}_1$ and the map $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{C}_1$ to be the identity. Thus any representation of an n-covering in Ker $(G_n \to G_\nu)$ is a representation of a ν_1-covering in G_{ν_1}, and vice versa. Since the condition for two representations to give the same covering is stricter for ν_1-coverings than for n-coverings, there is a homomorphism $G_{\nu_1} \to G_n$ such that $G_{\nu_1} \to G_n \to G_\nu$ is exact.

It remains to find the kernel of $G_{\nu_1} \to G_n$. If a representation of the trivial n-covering of $\mathcal{C}$ is given by

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] & \mathcal{C}_1 \arrow[r] & \mathcal{C} \\ \mathcal{D} \arrow[u, leftrightarrow] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

then $\mathcal{D}$ contains a rational point and may therefore be taken to be a copy of $\mathcal{C}$. Thus we get just n^2 effectively distinct representations, the birational maps $\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{C}$ being $x \leftrightarrow x + \mathfrak{d}$ for the n^2 distinct n-division points on $\mathcal{C}$. A representation here gives rise to a representation of a ν_1-covering if and only if the map $\mathcal{D} \to \mathcal{C}_1$ is defined over the rationals; that is, if $\nu_1 \mathfrak{d}$ is rational. Two of them give rise to the same ν_1-covering if and only if the difference of their $\mathfrak{d}$'s is the sum of a rational point and a ν_1-division point. Hence the order of the kernel is

$$\frac{[\mathcal{A}_1 \cap \nu^{-1}\mathfrak{o}]}{\text{number of cosets of } \nu_1^{-1}\mathfrak{o}_1 \text{ in } n^{-1}\mathfrak{o} \text{ which contain rational points}}.$$

This is clearly just the denominator of (5. 2), and so we have

$$(5.\,4) \qquad [G_n] \leqq \frac{[G_\nu]\,[G_{\nu_1}]}{[\mathcal{A} \cap \nu_1^{-1}\mathfrak{o}_1]\,[\mathcal{A}_1 \cap \nu^{-1}\mathfrak{o}]/[\mathcal{A} \cap n^{-1}\mathfrak{o}]}.$$

(The inequality sign here arises because the homomorphism $G_n \to G_\nu$ need not be onto.) Similar arguments work for the groups G'; and since $G'_n \to G'_\nu$ is onto, we have (5. 2).

We now apply these arguments to the particular case that interests us, writing

$$\mathcal{C} = \Gamma_D\colon\ y^2 z = x^3 - Dxz^2,$$
$$\mathcal{C}_1 = \Gamma_{-4D}\colon\ y_1^2 z_1 = x_1^3 + 4Dx_1 z_1^2.$$

We take $n = 2$, and define ν as the map $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ given by

$$(x_1, y_1, z_1) \to [2x_1(x_1^2 + 4Dz_1^2),\ y_1(x_1^2 - 4Dz_1^2),\ 8x_1^2 z_1]$$

and ν_1 as that given by $(x, y, z) \to [y^2 z,\ y(x^2 + Dz^2),\ x^2 z]$. Then we have

Lemma 8. *There is a natural isomorphism between the ν-coverings of Γ_D and the elements of Q^*/Q^{*2}. If (a) is any element of Q^*/Q^{*2}, the corresponding curve $\mathcal{D}$ may be taken to be*

$$(5.\,5) \qquad \mathcal{D}\colon\ as^2 = a^2 t^4 - D.$$

We follow the proof of Lemma 4 of Cassels [5] II. Let $x_1 = (x_1, y_1, z_1)$ be generic on $\mathcal{C}_1$ and write

$$x = \nu x_1,\ t = y_1/2a^{\frac{1}{2}}x_1.$$

Then we have $y_1^2/x_1^2 = 4x/z = 4at^2$; and if $\mathcal{D}$ is the locus of (x, t) it follows that $\mathcal{D}$ is defined over the rationals and is in birational correspondence with $\mathcal{C}_1$ over the complex numbers, and that the induced map $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ maps (x, t) on x. Hence we have a ν-covering. If we write $y/z = ast$ then $\mathcal{D}$ takes the form (5. 5).

Conversely, let $\mathfrak{d}$ be the point $(0, 0, 1)$ on Γ_D, and let $\mathcal{D}$ be the curve of the ν-covering with generic point X corresponding to x_1. The inverse image of $\mathfrak{o}^{-1}\mathfrak{d}$ on $\mathcal{D}$ is rational and linearly equivalent to zero; hence there is a function $f(X)$ defined over the rationals with this divisor; and since x/z has divisor $(\mathfrak{o}^{-1}\mathfrak{d})^2$ it follows that $x/z = af^2(X)$ for some

rational a. The class of a in Q^*/Q^{*2} does not depend on the choice of f; and it is easy to show that the two correspondences we have set up are inverses. This proves the Lemma.

We note that if $\mathcal{D}$ is everywhere locally soluble then we may take a to be a factor of D; for if p is a simple prime factor of a not dividing D then the three terms in (5. 5) are all divisible by different powers of p and so the equation is impossible. If $a \mid D$ then we need only examine the solubility of (5. 5) in the reals and in those p-adic fields with $p \mid 2D$; for the other fields it is trivially soluble. Hence it is easy to find G_ν, and similarly G_{ν_1}.

If, as in our previous paper, we write 2^t for the number of elements of order 2 in the Tate-Šafarevič group of Γ_D, so that 2^t is the order of G_2/G_2', then we can express (5. 2) and (5. 4) as follows:

Lemma 9. *Write 2^λ for the order of G_ν, and define λ', λ_1, λ_1', similarly. Then we have*

$$g = \lambda' + \lambda_1' - 2, \quad g + t \leqq \lambda + \lambda_1 - 2. \tag{5. 6}$$

In proving this we have to split cases. If D is a rational square, the order of G_n is 2^{g+t+2} and the denominator of (5. 2) is 1; otherwise the order of G_n is 2^{g+t+1} and the denominator of (5. 2) is 2. Similarly for (5. 4).

For historical reasons, $\lambda + \lambda_1 - 2$ is called the number of first descents; it is easy to show directly that it is non-negative. In general, there need not be equality in the second equation (5. 6). We shall write G_ν^* for the group of those ν-coverings of Γ_D which can be lifted back to everywhere locally soluble 2-coverings, and define λ^* by analogy with λ; similarly for λ_1^*. Then

$$g + t = \lambda^* + \lambda_1 - 2,$$

and it may be shown by the methods of Cassels that $\lambda - \lambda^*$ is an even integer. Since Γ_D and Γ_{-4D} may have different Tate-Šafarevič groups, $\lambda - \lambda^*$ and $\lambda_1 - \lambda_1^*$ need not be equal; we have many examples of this phenomenon.

Most of the cases with $g = 0$ in Table 1 were obtained at once from Lemma 9; but when $t > 0$ for one of the curves Γ_D or Γ_{-4D} it was necessary to do a further descent. The next step is to find λ^*, and for this we use

Lemma 10. *Let* (5. 5) *be a ν-covering of Γ_D which is everywhere locally soluble, and let σ, τ be rational numbers such that*

$$a\sigma^2 = a^2\tau^2 - D. \tag{5. 7}$$

Then there is a one-one correspondence between the elements of Q^*/Q^{*2} and the ways of extending (5. 5) *to a 2-covering of Γ_D; if* (*b*) *is any element of Q^*/Q^{*2}, the corresponding curve $\mathcal{D}$ may be taken to be*

$$as^2 = a^2t^4 - D, \quad as\sigma - a^2t^2\tau + D = bu^2. \tag{5. 8}$$

We know that (5. 7) is soluble; for it is everywhere locally soluble by comparison with (5. 5). Now let x_2 be generic on the left-hand copy of C in the diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C \\ & \mathcal{D} \arrow[u, leftrightarrow] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

and write $x_1 = \nu_1 x_2$; retain otherwise the notation of Lemma 8. If we write

$$u = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\sigma - a\tau}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x_2^2 - Dz_2^2 - 2x_2z_2(a^{\frac{1}{2}}\sigma + a\tau)}{2y_2z_2}\right)$$

we may after some trouble verify that

$$as\sigma - a^2t^2\tau + D = bu^2.$$

The rest of the proof is analogous to that of Lemma 8, and is therefore omitted. We note that the correspondence is not natural, that is, it depends on the choice of σ and τ.

By eliminating s, we may replace the equations (5. 8) by the single equation

$$b^2u^4 + 2bu^2(a^2t^2\tau - D) + Da^2(t^2 - \tau)^2 = 0. \tag{5. 9}$$

From this we may find necessary conditions on b for $\mathcal{D}$ to be everywhere locally soluble, analogous to those for a which follow the proof of Lemma 8. We may assume b to be a square free integer. Then if p is an odd prime which divides the denominators of σ, τ to an odd power and does not divide D, it must divide b; and the only other primes that may divide b are those that divide $2D$.

If we use Lemma 10 to find the 2-coverings of Γ_D explicitly, some care is needed to avoid duplication. In general, there are several essentially different ways of extending a ν_1-covering to the same n-covering; the number is equal to the order of the kernel of the map $G_\nu \to G_n$ described earlier. In our actual case, if D is not a square there are 2 distinct extensions giving rise to each 2-covering and they correspond to the values b_0 and Db_0 for b. If D is a square, there is only one extension for each 2-covering.

If $t > 0$ for both of the curves Γ_D and Γ_{-4D}, then in order to find g it is necessary to go on at least to the third descent. We have in fact worked out the formulae for this. Unfortunately, mainly owing to machine development, we have not been able to use these formulae, as we had intended, to fill in some of the gaps in Table 1. We therefore omit all the details of the third descent; we will be happy to supply the formulae to any intending computer. An alternative method is given in [10].

§ 6. The Tamagawa number

In this section we define the Tamagawa number that we use, and show how to calculate it. Since we are dealing with an unusually simple particular case, we have tried to make our description at least formally self-contained; for a general account see [23].

Let V be a group-variety of dimension n, defined over the rationals. There exists on V an nth order differential ω which is defined over the rationals and invariant under left translation; and ω is unique up to multiplication by a non-zero rational. (This much freedom does not matter, for the rational factor turns out to be self-cancelling.) If $x_1, \ldots, x_n$ are local coordinates at the origin on V, then we may write

$$\omega = g\,dx_1 \cdots dx_n.$$

For any prime p, including infinity, let V_p be the set of points of V defined over the p-adic numbers; then V_p is a topological group and ω induces on it a Haar measure

$$\omega_p = |\,g\,|_p (dx_1)_p \cdots (dx_n)_p$$

invariant under left translation. Here $|g|_p$ is the normal p-adic valuation, and for finite p we normalise $(dx)_p$ by the condition

$$\int_{\mathfrak{o}_p} (dx)_p = 1,$$

the integral being taken over the ring of p-adic integers; we note that this is equivalent to

$$\int_{\text{units}} (dx)_p = \frac{p-1}{p}.$$

Suppose now for simplicity that V is complete. We may define the 'adèle variety' V_A to be $\prod_p V_p$, the product being taken over all primes including infinity; then $\omega_A = \prod \omega_p$ is a measure on V_A. Since $\prod |a|_p = 1$ for non-zero rational a, ω_A remains invariant when ω is multiplied by a non-zero rational. Write V_Q for the subgroup of points of V with rational coordinates; there is a natural imbedding of V_Q into V_A. The Tamagawa number may be defined by

$$t(V) = \int_{V_A/V_Q} \omega_A. \tag{6.1}$$

In the more usual case, V is not complete and one must proceed with more care; see [23]. Tamagawa and others have shown that for the classical groups the Tamagawa number is a small positive integer. For example, the orthogonal group of a quadratic form not representing zero has Tamagawa number 2; and this fact is equivalent to Siegel's theorem, see for instance [24].

In our particular case, V is the elliptic curve Γ_D, with differential

$$\omega = dx/y.$$

In the main case we consider, Γ_D has only finitely many rational points. We have found it more convenient not to factor them out, so we define formally

$$\tau(D) = \prod_p \int_{\Gamma_p} \omega_p, \tag{6.2}$$

where the product is over all primes including infinity and Γ_p is the p-adic completion of the projective curve Γ_D.

Various difficulties may arise in interpreting a product like (6.2). It may be necessary to insert convergence factors, one to each term of the product; we do not do this here, but expect that we shall need to do so when discussing curves Γ_D with $g > 0$. Whether or not this has been done, there are now three useful possibilities for the infinite product. It may converge absolutely, or it may converge conditionally provided the factors are taken in their natural order. Both these cases occur in the work of Tamagawa. Failing these, it is necessary to ascribe a value to the product (6.2) by a suitable summation method; and this we have to do here. Formally, the product (6.2) differs only in finitely many factors from that for $[L_D(1)]^{-1}$, by Lemma 12 below; and we can therefore deduce a value for $\tau(D)$ from that of $L_D(1)$. More rigorously, we regard the infinite product in (6.2) as the formal value of the Euler product form of a Dirichlet series at $s = 1$, and ascribe to it the value at $s = 1$ of the underlying function. This gives rise to a satisfactory summation method, closely allied to that of Abel.

There are no difficulties of principle in calculating the separate integrals in (6.2), though the details are tedious. For convenience we shall as usual assume that D is fourth power free; however we allow D to be divisible by 4 since $\tau(D)$ is not invariant under isogeny.

Lemma 11. *If p is odd and $p \mid D$ then $\int \omega_p = 2$ unless $p^2 \| D$ and D is a p-adic square, in which case $\int \omega_p = 4$.*

Suppose first that $p \| D$; then we have

$$V_p = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n,$$

where F_n is the set of points with $p^{2n+1} \| x$, $p^{n+1} \| y$ and G_n is the set of points with $p^{-2n} \| x$, $p^{-3n} \| y$. The point (x, y) can belong to F_n only if $-Dx$ is a p-adic square, and to each such x correspond two values of y; hence the contribution to the integral from F_n is $p^{n+1}(p-1)/p^{2n+2}$. Similarly, (x, y) can belong to G_n only if x is a p-adic square, and to each such x correspond two values of y; hence the contribution to the integral from G_n is $(p-1)/p^{n+1}$. Adding all these together, we find that $\int \omega_p = 2$.

The case $p^3 \| D$ is similar; we have

$$V_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$$

where G_n is as before but F_n is the set of points with $p^{2n+1} \| x$, $p^{n+2} \| y$. Now the contribution to the integral from F_n is $(p-1)/p^n$; and adding up as before we find that $\int \omega_p = 2$.

Finally, suppose that $p^2 \| D$. Then we have

$$V_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} H_n,$$

where F_n is the set of points with $p^{2n} \| x$, $p^{n+1} \| y$, G_n is as before and H_n is the set of points with $p \| x$, $p^n \| y$. The contribution to the integral from F_n is $(p-1)/p^n$, and that from G_n is as usual $(p-1)/p^{n+1}$. H_n is null unless D is a p-adic square. If $D = c^2$ then the point (x, y) can belong to H_n only if $p^{2n-2} \| (x \pm c)$ and $2(x \pm c)$ is a p-adic square; and to each such x correspond two values of y. Hence in this case the contribution to the integral from H_n is $2(p-1)/p^{n-1}$. Adding everything up, we obtain the result stated in the lemma.

Lemma 12. *If p is odd and $p \nmid D$ then $\int \omega_p = N_p/p$.*

This is a special case of Theorem 2. 2. 5 of [23]; alternatively it may be proved in the same way as Lemma 11, remembering that in finding N_p we include the point at infinity.

Lemma 13. *If $D \equiv 3 \bmod 4$ then $\int \omega_2 = \frac{1}{2}$; if $D \equiv 4, 12, 36$ or $60 \bmod 64$ then $\int \omega_2 = 2$; in every other case $\int \omega_2 = 1$.*

We omit the proof of the lemma, which is similar to that of Lemma 11. It is necessary to consider a very large number of distinct cases, and though none of them individually presents much difficulty, the succession becomes wearisome.

Lemma 14.

$$\int \omega_\infty = \begin{cases} 4\omega D^{-\frac{1}{4}} & \text{for } D > 0, \\ 4\omega(-4D)^{-\frac{1}{4}} & \text{for } D < 0. \end{cases}$$

In the statement and proof of this lemma, ω denotes the real period of $\wp(u)$ as defined in § 3. If $D > 0$ we have

$$\int \omega_\infty = 2\left[\int_{-\sqrt{D}}^{0} + \int_{\sqrt{D}}^{\infty}\right] \frac{dx}{\sqrt{(x^3 - Dx)}} = 4\omega D^{-\frac{1}{4}};$$

if $D < 0$ we have

$$\int \omega_\infty = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^3 - Dx)}} = 4\omega(-4D)^{-\frac{1}{4}}.$$

Here the factor 2 arises because there are two values of y for each acceptable x; for the evaluation of the elliptic integrals see [4], formulae 233.00, 237.00 and 239.00.

We can now express the Tamagawa number $\tau(D)$ in terms of $\sigma(D)$ which we have already shown how to compute. By Lemma 12 and the results of § 2, we have formally

$$\Pi \int \omega_p = \Pi\,(N_p/p) = [L_D(1)]^{-1}, \tag{6.3}$$

where the products are taken over all finite primes not dividing $2D$. Define $\sigma(D)$ by (1.6) even when $4 \mid D$, so that we have

$$\sigma(-4D) = 2\sigma(D) \text{ for } D > 0,$$
$$\sigma(-4D) = \sigma(D) \quad \text{for } D < 0.$$

Then by (1.6), (6.3) and Lemma 14

$$\tau(D)\,\sigma(D) = 4\Pi \int \omega_p, \tag{6.4}$$

where the product is taken over the finitely many primes which divide $2D$. The right hand side of (6.4) can be evaluated in any particular case by Lemmas 11 and 13.

We can similarly ascribe a Tamagawa number to any elliptic curve with finitely many rational points; and it is in each case a computable multiple of the formal product (1.2). The analogues of Lemmas 11 and 13 are very messy, and we have in general no neat way of evaluating the formal product.

§ 7. The numerical evidence

In this section we describe the calculations that we have actually carried out on EDSAC 2, and the extent to which they confirm our conjectures. Let D be a positive integer not divisible by a fourth power or by 4; define $\sigma(D)$ by (1.6) and Δ as in § 3. After Theorem 1, we know that $\sigma(D)$ is a rational integer for $|D| > 1$; by means of the formulae (3.13) to (3.17) we have computed its value whenever $|\Delta| < 108$ or $|\Delta| = 113, 165, 195, 231$.

The details of the calculation are of little interest, except for one point of organisation. Each of the Δ^2 terms in the formula used involves a quartic residue and a value of $\wp(u)$; and nearly all the time taken by the computation is spent in evaluating these. We therefore gain efficiency by calculating $\sigma(D)$ simultaneously for all D corresponding to a given Δ. If $|\Delta|$ is a prime p then we obtain the 12 cases

$$D = \pm 2^a p^b \ (a = 0, 1;\ b = 1, 2, 3);$$

if $|\Delta|$ is a product of two or three primes, we obtain respectively 36 or 108 cases. For a given value of Δ, the complete run took about $\Delta^2/20$ seconds. There is an automatic check against machine (or program) error, in that the final value of $\sigma(D)$ has to be an integer to within the accuracy of the calculation.

For comparison with our main conjecture (1.5), we have also found the value of g for as many of the curves as we conveniently could. For each curve we have carried out the first descent by the methods of § 5, and where necessary the second descent also; we had hoped to carry out the third descent, but as explained in § 5 we were unable

to do so. The calculations are straightforward except for the recurrent need to solve equations of the form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \tag{7.1}$$

over the rationals. One of Lagrange's proofs of his theorem [16] gives a constructive method of solving (7. 1) when it is possible. Alternatively we may search for a solution, since Holzer [14] has shown that we need only examine the region

$$x^2 \leqq |bc|, \; y^2 \leqq |ca|, \; z^2 \leqq |ab|.$$

The local solubility of the coverings was checked by methods similar to those described in our previous paper. In searching for rational points on the coverings we considered only relatively small values of the variables; for we have found that time spent on extending such a search is only meagrely rewarded.

For each of the values of D considered, we give in Table 1 the corresponding values of σ, g, λ and λ_1, the last two being the numbers of first descents defined in § 5. These are also the values of σ, g, λ_1 and λ respectively corresponding to $-4D$. Let τ be the Tamagawa number of Γ_D as defined in § 7; and let $\eta(D)$ be the number of rational points on Γ_D of finite order. (Thus within the limits of our table $\eta = 4$ when D is -4 or a square, and $\eta = 2$ otherwise.) Rather than take up space printing the values of $\tau(D)$ and $\tau(-4D)$, we have marked the value of σ with an asterisk whenever $\sigma \neq 0$ and $\tau(D) \neq \eta^2(D)$ or $\tau(-4D) \neq \eta^2(-4D)$. These cases are further described in Table 2; according to our conjectures they are just those in which $g = 0$ and the Tate-Šafarevič group is non-trivial; Table 2 is possibly less reliable than Table 1.

We have given the value of g whenever we know it. A gap instead of the value of g indicates that we do not know it, and indeed have no information beyond that given by the general inequality

$$0 \leqq g \leqq \lambda + \lambda_1 - 2.$$

An entry such as '1—' indicates that (because of the second descent) we know that $g \leqq 1$; in these cases there is a non-trivial Tate-Šafarevič group. An entry such as '1+' indicates that we know that $g \geqq 1$ since we have actually found a generator.

In Table 1 we have packed onto each line the entries corresponding to four linked values of D. In each line the first column gives an odd positive integer D_0. The remaining sixteen columns form four groups of four. The first group gives the values of σ, g, λ and λ_1 for $D = D_0$; and the other three groups correspond to the cases $D = -D_0$, $D = 2D_0$ and $D = -2D_0$ in that order.

Let us write $\gamma = \eta^2/\tau$; then the main conjectures of this paper are that $\gamma \neq 0$ if and only if $g = 0$, and that in this case γ is the order of the Tate-Šafarevič group. The first part of this agrees with our calculations whenever we know g. Moreover, the work of Cassels [5] strongly suggests that g should have the parity of $\lambda + \lambda_1$; and in our tables $\gamma = 0$ whenever $\lambda + \lambda_1$ is odd. For the second part of the conjecture, we note that in our tables γ is always a square; and Cassels has shown that when the order of the Tate-Šafarevič group is finite it is a square. We have made no attempt to calculate p-coverings for any prime $p > 2$; and the practical difficulties appear to us formidable. But we do known the 2-component of the Tate-Šafarevič group in every case for which we know that $g = 0$; and this yields always the correct power of 2 in γ. (The few cases where $\gamma \neq 0$ but we do not know that $g = 0$ are ones in which the second descent is indecisive; it is further corroboration of the conjecture that in these cases γ is divisible by a high power of 2.)

In the course of these calculations, we observed another identity which we conjectured to hold always; this is

$$\tau(-4D)/\tau(D) = 2^{\lambda_1-\lambda}; \tag{7.2}$$

in fact, without some such identity our conjectures for $\tau(-4D)$ and $\tau(D)$ could hardly be consistent. This relation need not be confined to the case $\gamma \neq 0$, for the left hand side may be written as a finite product. In fact we deduce from the results of § 6 that

$$\tau(-4D)/\tau(D) = \prod_{p \mid 2D\infty} \varrho_p,$$

where, for each p, ϱ_p is short for $\int_{\Gamma_D} \omega_p \Big/ \int_{\Gamma_{-4D}} \omega_p$, and may be read off explicitly from Lemmas 11, 13 and 14.

We are glad to say that Cassels [7] has been able to prove a more general theorem including (7. 2), which gives our conjectures considerable support. The identity has also been verified more directly by E. Forrest [10].

Table 1

D	D			$-D$			$2D$			$-2D$		
	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$
1	¼	0	1.1	½	0	0.2	0	1	2.1	1	0	1.1
3	1	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
5	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
7	0	1	1.2	2	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
9	1	0	2.0	0	1	0.3	2	0	1.1	0	1	2.1
11	1	0	1.1	2	0	1.1	0	1	2.1	2	0	1.1
13	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
15	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
17	0	2	2.2	4*	0	1.3	0	1	3.2	0	2	2.2
19	1	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
21	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
23	0	1	1.2	2	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
25	0	1	2.1	2	0	0.2	0	1	2.1	2	0	1.1
27	1	0	1.1	2	0	1.1	0	1	2.1	2	0	1.1
29	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
31	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8*	0	2.2
33	4	0	1.1	0	2	1.3	0	1	2.1	0	2	2.2
35	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
37	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
39	0	1	1.2	0	2	2.2	0	1	2.1	4	0	1.1
41	0	1	2.1	4*	0	1.3	0	3	3.2	8*	0	2.2
43	1	0	1.1	2	0	1.1	0	1	2.1	2	0	1.1
45	0	1	1.2	4	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
47	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
49	0	1	2.1	0	1	0.3	4*	0	3.1	0	1	1.2
51	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
53	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
55	0	1	1.2	0	2	2.2	0	1	2.1	4	0	1.1
57	0	1	2.1	8*	0	1.3	0	1	2.1	0	2	2.2
59	1	0	1.1	2	0	1.1	0	1	2.1	2	0	1.1
61	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
63	4	0	1.1	0	2	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1
65	0	2	2.2	0	2	1.3	0	1	2.1	4	0	1.1
67	1	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
69	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
71	0	1	1.2	2	0	1.1	0	1	2.1	8*		2.2
73	0	1	2.1	0	2	1.3	0	1	3.2	8*		2.2
75	2	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
77	0	2	2.2	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
79	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2

D	D			$-D$			$2D$			$-2D$		
	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$
83	1	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
85	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
87	0	1	1.2	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
89	0	1	2.1	0	2	1.3	0	1	3.2	0	2	2.2
91	2	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
93	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
95	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
97	0	2	2.2	4*	0	1.3	0	1	3.2	8*		2.2
99	0	1	1.2	0	2	2.2	8*	0	3.1	0	1	1.2
101	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
103	0	1	1.2	2	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
105	0	1	2.1	0	2	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
107	1	0	1.1	2	0	1.1	0	1	2.1	2	0	1.1
113	8*		2.2	0	2	1.3	0	3	3.2	0	2	2.2
117	0	2	3.1	8*	0	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1
121	1	0	2.0	0	1	0.3	2	0	1.1	0	1	2.1
125	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
135	0	1	1.2	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
147	0	1	1.2	8	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1
153	4	0	1.1	0	1	1.2	0	2	3.1	0	1	1.2
165	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
169	0	1	2.1	2	0	0.2	0	1	2.1	2	0	1.1
171	0	1	2.1	0	1	1.2	0	2	2.2	0	1	2.1
175	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
189	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
195	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
207	0	2	1.3	8	0	1.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
225	0	1	2.1	0	1	0.3	4	0	1.1	0	1	2.1
231	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1	8	0	1.1
245	4	0	1.1	4	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1
261	4	0	1.1	4	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
275	0	2	2.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
279	4	0	1.1	0	1	1.2	4	0	1.1	0	1	2.1
289	4*	0	2.2	0	2	1.3	0	1	2.1	4	0	1.1
297	0	1	2.1	8*	0	1.3	0	1	2.1	0	2	2.2
315	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	3.1	0	1	1.2
325	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
343	0	1	1.2	2	0	1.1	0	1	2.1	8*		2.2
351	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
361	1	0	2.0	0	1	0.3	2	0	1.1	0	1	2.1
363	0	1	2.1	0	1	1.2	0	2	2.2	0	1	2.1
375	0	1	1.2	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
425	0	1	2.1	0	2	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
441	0	1	3.0	8*	0	0.4	0	1	2.1	8	0	1.1
459	2	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
475	4	0	1.1	0	2	2.2	0	1	2.1	4	0	1.1
495	8	0	1.1	0	2	1.3	8	0	1.1	0	1	2.1
507	0	2	2.2	8	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
513	4	0	1.1	0	2	1.3	0	1	2.1	16*		2.2
525	0	2	2.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
529	0	1	2.1	0	1	0.3	4*	0	3.1	0	1	1.2
539	0	1	2.1	0	1	1.2	8*	0	3.1	0	1	1.2
585	8	0	1.1	0	1	1.2	0	2	3.1	0	1	1.2
605	0	1	2.1	8*	0	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1
621	0	2	2.2	0	1	1.2	0	1	2.1	16*		2.2
637	0	1	1.2	4	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1
675	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
693	8	0	1.1	8	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
735	8	0	1.1	0	2	1.3	0	2	3.1	0	1	1.2
783	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1

D	D			$-D$			$2D$			$-2D$		
	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$
825	0	1	2.1	0	2	1.3	0	1	2.1	16	0	1.1
837	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
841	0	1	2.1	2	0	0.2	0	1	2.1	18*	0	1.1
845	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	3.2	8	0	1.1
847	0	2	1.3	8	0	1.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
867	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
875	2	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
945	8	0	1.1	0	2	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
961	0	1	2.1	0		0.3	0	2	3.1	0		1.2
975	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
1029	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
1083	0	1	1.2	0	1	2.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
1089	4	0	2.0	8*	0	0.4	0	1	1.2	0	2	3.1
1125	4	0	1.1	4	0	1.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
1183	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
1225	4	0	2.0	0	1	0.3	0	2	3.1	0	1	1.2
1323	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1	0	1	2.1
1331	1	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	18*	0	1.1
1369	0	1	2.1	2	0	0.2	0		2.1	2	0	1.1
1375	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
1445	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
1485	8	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
1521	0	1	2.1	0	1	0.3	4	0	1.1	0	1	2.1
1575	8	0	1.1	0	1	1.2	0	2	2.2	0	1	2.1
1587	0	1	2.1	16*	0	1.3	8*	0	3.1	0	1	1.2
1617	0	1	1.2	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1
1625	0	1	2.1	8*	0	1.3	0	1	2.1	4	0	1.1
1681	0	2	2.2	8*		1.3	0	1	2.1	4	0	1.1
1715	2	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
1755	4	0	1.1	8	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
1805	0	1	2.1	0	2	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1
1815	8	0	1.1	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1
1849	9*	0	2.0	0	1	0.3	2	0	1.1	0	1	2.1
2079	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
2125	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
2197	0	1	2.1	0		1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
2205	0	2	1.3	0	1	2.1	0	1	2.1	16	0	1.1
2209	0	1	2.1	0		0.3	16*		3.1	0	1	1.2
2375	0	1	1.2	0	2	2.2	0	1	2.1	4	0	1.1
2475	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	3.1	0	1	1.2
2523	18*	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	8	0	1.1
2535	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
2541	0	1	1.2	8	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
2601	4	0	2.0	0	1	0.3	0	2	2.2	0	1	2.1
2625	8	0	1.1	16*	0	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
2809	0		2.1	2	0	0.2	0		2.1	2	0	1.1
2883	0		1.2	8	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1
2925	0	1	2.1	0	2	1.3	0	2	2.2	0	1	2.1
3025	0	1	2.1	0	1	0.3	4	0	1.1	0	1	2.1
3087	4	0	1.1	16*	0	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1
3249	4	0	2.0	8*	0	0.4	0	1	1.2	0	2	3.1
3267	0	1	2.1	16*	0	1.3	16*		2.2	0	1	2.1
3375	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
3481	1	0	2.0	0		0.3	2	0	1.1	0		2.1
3675	0	1	1.2	0	1	2.1	16	0	1.1	0	1	2.1
3721	0	1	2.1	2	0	0.2	0	1	2.1	18*	0	1.1
3773	16*		2.2	0	1	1.2	0	1	2.1	16*		2.2
3993	0	1	2.1	8*	0	1.3	0	1	2.1	16*		2.2
4125	8	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
4225	0	2	2.2	8	0	0.2	0	1	2.1	4	0	1.1

D	D			$-D$			$2D$			$-2D$		
	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$
4459	2	0	1.1	4	0	1.1	0		2.1	4	0	1.1
4489	1	0	2.0	0		0.3	18*	0	1.1	0	1	2.1
4563	16*		2.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
4725	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
4761	0	1	3.0	0	2	0.4	0	1	2.1	32*		2.2
4851	8	0	1.1	0	1	1.2	0	3	4.1	32*	0	1.3
4875	4	0	1.1	8	0	1.1	0	1	2.1	0	2	2.2
4913	8*		2.2	4*	0	1.3	0	1	3.2	8*		2.2
5041	0	1	2.1	0		0.3	4*	0	3.1	0		1.2
5145	0	1	2.1	16*	0	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
5329	4*	0	2.2	8*		1.3	0	1	3.2	0	2	2.2
5445	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	16	0	1.1
5929	0	1	3.0	0	2	0.4	0	1	2.1	0	2	2.2
6125	0	1	1.2	4	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1
6241	0		2.1	0		0.3	0	2	3.1	0		1.2
6591	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	36*	0	1.1
6615	8	0	1.1	0	1	1.2	16*	0	3.1	0	1	1.2
6655	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	4	0	1.1
6859	9*	0	1.1	2	0	1.1	0		2.1	2	0	1.1
6889	1	0	2.0	0	1	0.3	18*	0	1.1	0	1	2.1
7225	0	1	2.1	8	0	0.2	0	1	3.2	0	2	2.2
7425	8	0	1.1	16*	0	1.3	0	1	2.1	16	0	1.1
7569	0	1	2.1	0	1	0.3	4	0	1.1	0	1	2.1
7605	8	0	1.1	8	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
7623	0	1	1.2	16	0	1.1	0	1	2.1	16	0	1.1
7803	18*	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
7875	0	1	1.2	16	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
7921	4*	0	2.2	8*		1.3	0	1	3.2	16*		2.2
8281	4	0	2.0	0	1	0.3	0	2	3.1	0		1.2
8575	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
8649	0	1	3.0	8*	0	0.4	0		2.1	8	0	1.1
8775	0	1	1.2	16	0	1.1	0	1	2.1	8	0	1.1
9025	0	1	2.1	0	1	0.3	4	0	1.1	0	1	2.1
9075	0	1	2.1	0	2	1.3	16	0	1.1	0	1	2.1
9261	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	36*	0	1.1
9317	0	1	2.1	0	1	1.2	0	1	2.1	16*		2.2
9409	4*	0	2.2	0	2	1.3	0		2.1	4	0	1.1
9747	0	1	1.2	32*		2.2	8*	0	3.1	0	1	1.2
10201	0		2.1	2	0	0.2	0		2.1	18*	0	1.1
10609	0		2.1	0		0.3	4*	0	3.1	0	1	1.2
10985	0	1	2.1	8*	0	1.3	0	1	2.1	4	0	1.1
11025	16	0	2.0	0	2	0.4	0	1	2.1	16	0	1.1
11319	0	1	1.2	8	0	1.1	0		2.1	8	0	1.1
11449	9*	0	2.0	0		0.3	18*	0	1.1	0	1	2.1
11979	0	1	1.2	0	1	2.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
12167	0	1	1.2	18*	0	1.1	0		2.1	8*		2.2
12375	8	0	1.1	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1
12675	8	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	16	0	1.1
12769	16*		2.2	0	2	1.3	0	1+	3.2	0	2	2.2
14283	0		2.1	0	1	1.2	8*	0	3.1	0		1.2
14553	8	0	1.1	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1
14625	0	1	1.2	0	1	1.2	16*	0	3.1	0	1	1.2
14739	2	0	1.1	0	1	1.2	0		2.1	4	0	1.1
15125	0	2	3.1	8*	0	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1
15379	18*	0	1.1	0	1	1.2	0		2.1	4	0	1.1
15435	0	1	1.2	0	1	2.1	16*	0	3.1	0	1	1.2
16335	8	0	1.1	0	2	1.3	8	0	1.1	0	1	2.1
17787	8	0	1.1	16	0	1.1	0	1	1.2	32*	0	3.1
18375	8	0	1.1	0	1	1.2	0	2	3.1	0	1	1.2
19773	0	1	2.1	8*	0	1.3	4	0	1.1	0	1	2.1

D	D			$-D$			$2D$			$-2D$		
	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$
19965	8	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
20577	4	0	1.1	32*		1.3	0		2.1	0	2	2.2
21125	0	1	2.1	0		1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
22707	2	0	1.1	0	1	1.2	0		2.1	0	2	2.2
22815	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	0	2	2.2
22869	8	0	1.1	8	0	1.1	16*	0	3.1	0	1	1.2
23625	0	1	2.1	16*	0	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
24389	0		2.1	0		1.2	0		2.1	2	0	1.1
24565	0	1	2.1	0	1	1.2	0		2.1	4	0	1.1
25725	16	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
25947	0	1	1.2	0		2.1	36*	0	1.1	0	1	2.1
27225	0	1	3.0	0	2	0.4	0	1	1.2	32*	0	3.1
27951	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	72*	0	1.1
29791	0		1.2	0		1.2	0		2.1	8*		2.2
32955	4	0	1.1	8	0	1.1	0	1	2.1	32*		2.2
33075	0	1	1.2	16	0	1.1	0	2	2.2	0	1	2.1
33275	16*		2.2	8	0	1.1	0		2.1	4	0	1.1
33957	8	0	1.1	8	0	1.1	0	2	3.1	0	1	1.2
34295	0		1.2	16*		2.2	0	1	2.1	4	0	1.1
35937	4	0	1.1	32*		1.3	0		2.1	16*		2.2
36125	4	0	1.1	0		1.2	0		2.1	4	0	1.1
36501	0	1	2.1	0		1.2	0		2.1	16*		2.2
37125	0	1	2.1	0	1	1.2	0		2.1	8	0	1.1
38025	16	0	2.0	0	1	0.3	8	0	1.1	0	1	2.1
41503	32*		1.3	8	0	1.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
42875	18*	0	1.1	4	0	1.1	0	1	2.1	4	0	1.1
43875	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	32*		2.2
44217	4	0	1.1	0		1.2	32*		3.1	0	1	1.2
45125	8*	0	3.1	32*		1.3	4	0	1.1	0		2.1
45375	8	0	1.1	32*	0	1.3	8	0	1.1	0	1	2.1
46305	8	0	1.1	16*	0	1.3	0		2.1	8	0	1.1
50653	18*	0	1.1	0		1.2	0	1	2.1	2	0	1.1
53361	0	1	3.0	0	1	0.5	16	0	1.1	0	1	2.1
54925	4	0	1.1	0		1.2	0	1	3.2	8	0	1.1
55125	0	1	1.2	0	1	2.1	0	1	2.1	16	0	1.1
57967	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
59319	0		1.2	16*		2.2	0		2.1	4	0	1.1
59895	8	0	1.1	0	1	1.2	8	0	1.1	0	1	2.1
61731	0		2.1	16*	0	1.3	16*		2.2	0		2.1
63375	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	16	0	1.1
65219	0		2.1	16*	0	1.3	8*	0	3.1	0	1	1.2
68921	0		2.1	4*	0	1.3	0	1+	3.2	32*		2.2
73167	0		1.2	0		1.2	0		2.1	4	0	1.1
77175	8	0	1.1	0	1	1.2	16	0	1.1	0	1	2.1
79507	1	0	1.1	0		1.2	0		2.1	2	0	1.1
81675	0		2.1	0	1	1.2	16	0	1.1	0	1	2.1
83853	0	1	1.2	8	0	1.1	16*	0	3.1	0		1.2
89373	36*	0	1.1	0	1	1.2	0		2.1	4	0	1.1
98865	0	1	1.2	0	1	1.2	0	2	3.1	0	1	1.2
99825	8	0	1.1	16*	0	1.3	0	1	2.1	16	0	1.1
101871	0	1	1.2	0	1	1.2	0	1	2.1	8	0	1.1
103823	0		1.2	0		1.2	0		2.1	0	1+	2.2
107653	36*	0	1.1	4	0	1.1	4	0	1.1	0		2.1
109503	32*		1.3	8	0	1.1	8*	0	3.1	0	1	1.2
114075	8	0	1.1	0	2	2.2	0	1	2.1	64*		2.2
122825	0		2.1	0	2	1.3	0	1	2.1	8	0	1.1
124509	0	1	1.2	8	0	1.1	64*		3.1	0	1	1.2
128625	8	0	1.1	0	2	1.3	0	1	2.1	72*	0	1.1
132651	2	0	1.1	36*	0	1.1	0		2.1	36*	0	1.1
136125	16	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	16	0	1.1

D	D			$-D$			$2D$			$-2D$		
	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$	σ	g	$\lambda.\lambda_1$
148877	2	0	1.1	0		1.2	0		2.1	18*	0	1.1
160083	72*	0	1.1	0	1	1.2	0	1	1.2	0	2	3.1
164775	0	1	1.2	16	0	1.1	0	1	2.1	8	0	1.1
165375	8	0	1.1	32*	0	1.3	16*	0	3.1	0		1.2
166375	0		1.2	16*		2.2	0		2.1	4	0	1.1
171475	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	36*	0	1.1
179685	0	1	2.1	0		1.2	0		2.1	8	0	1.1
185193	0		2.1	8*	0	1.3	0		2.1	16*		2.2
190125	0	1	1.2	8	0	1.1	32*	0	3.1	0	1	1.2
195657	8	0	1.1	0		1.2	72*	0	1.1	0	1	2.1
205379	9*	0	1.1	0		1.2	0		2.1	2	0	1.1
219501	0	1	1.2	4	0	1.1	8*	0	3.1	0		1.2
226981	0		2.1	0		1.2	0		2.1	98*	0	1.1
231525	0	1	2.1	0	1	1.2	0		2.1	8	0	1.1
251559	0		1.2	8	0	1.1	0		2.1	8	0	1.1
268119	4	0	1.1	0	1	1.2	100*	0	1.1	0	1	2.1
274625	16*		2.2	32*		1.3	0		2.1	36*	0	1.1
296595	4	0	1.1	0	1	1.2	0	1	2.1	32*		2.2
299475	0	1	1.2	32	0	1.1	64*		3.1	0	1	1.2
300763	49*	0	1.1	2	0	1.1	0		2.1	18*	0	1.1
328509	16*		2.2	0		1.2	0		2.1	0	2	2.2
357911	0	1	1.2	18*	0	1.1	0		2.1	0	1+	2.2
373527	0	1	1.2	16	0	1.1	0		2.1	16	0	1.1
385875	0		1.2	16	0	1.1	16*	0	3.1	0		1.2
389017	0		2.1	64*		1.3	0	1−	3.2	8*		2.2
408375	8	0	1.1	0	1	1.2	8	0	1.1	0		2.1
456533	0		2.1	0		1.2	0		2.1	64*		2.2
493039	0		1.2	0	1	1.2	0		2.1	32*		2.2
494325	16*	0	3.1	64*		1.3	16	0	1.1	0	1	2.1
499125	0		2.1	0	1	1.2	0		2.1	72*	0	1.1
570375	0		1.2	8	0	1.1	0		2.1	16	0	1.1
571787	9*	0	1.1	50*	0	1.1	0		2.1	2	0	1.1
586971	8	0	1.1	16	0	1.1	0	1	4.1	128*		1.3
614125	4	0	1.1	0		1.2	0		2.1	36*	0	1.1
658503	0		1.2	4	0	1.1	0		2.1	100*	0	1.1
704969	0		2.1	0	2	1.3	0	1	3.2	32*		2.2
753571	2	0	1.1	0		1.2	0		2.1	100*	0	1.1
804357	0		2.1	0		1.2	0		2.1	4	0	1.1
823875	4	0	1.1	0	1	1.2	0		2.1	0	2	2.2
857375	0	1	1.2	0		1.2	0		2.1	36*	0	1.1
898425	0		2.1	0	2	1.3	0		2.1	16	0	1.1
912673	72*		2.2	4*	0	1.3	0	1−	3.2	0	1+	2.2
1030301	18*	0	1.1	0		1.2	0		2.1	50*	0	1.1
1092727	0	1	1.2	98*	0	1.1	0		2.1	8*		2.2
1120581	8	0	1.1	72*	0	1.1	16*	0	3.1	0		1.2
1157625	0		2.1	64*		1.3	0		2.1	8	0	1.1
1225043	81*	0	1.1	0		1.2	0		2.1	18*	0	1.1
1369599	0		1.2	0		1.2	0		2.1	8	0	1.1
1442897	8*		2.2	64*		1.3	0		3.2	0	1+	2.2
1482975	0	1	1.2	0	1	1.2	0		2.1	72*	0	1.1
1497375	8	0	1.1	32*	0	1.3	8	0	1.1	0		2.1
1760913	0		1.2	0	1	1.2	8	0	1.1	0		2.1
2471625	8	0	1.1	0	1	1.2	16*	0	3.1	0		1.2
4108797	0	1	1.2	200*	0	1.1	16*	0	3.1	0	1	1.2
4492125	72*	0	1.1	0		1.2	0		2.1	8	0	1.1
7414875	36*	0	1.1	72*	0	1.1	0		2.1	32*		2.2
12326391	0		1.2	72*	0	1.1	0		2.1	72*	0	1.1

Table 2

We write $\gamma(D) = \eta^2(D)/\tau(D)$ as in § 7. Then in the range of Table 1

$$\gamma(D) = \gamma(-4D) = 0 \text{ or } 1,$$

except in the cases marked by asterisks. In the exceptional cases, γ takes the following values: —

(i) $\gamma(D) = 1$, $\gamma(-4D) = 4$

for $D =$ 98, 198, 414, 1058, 1078, 1694, 2166, 2250, 3174, 10082, 13230, 19494, 21218, 23958, 28566, 29250, 30870, 45125, 45738, 83006, 130438, 167706, 219006, 330750, 380250, 439002, 494325, 771750, 2241162, 4943250, 8217594;

and for $-D = 35574$, 54450.

(ii) $\gamma(D) = 4$, $\gamma(-4D) = 1$ for $D = 289$, 5329, 7921, 9409;

and for $-D =$ 17, 41, 57, 97, 117, 297, 441, 605, 1089, 1587, 1625, 2625, 3087, 3249, 3267, 3993, 4913, 5145, 7425, 8649, 9702, 10985, 15125, 19773, 23625, 45375, 46305, 61731, 65219, 68921, 99825, 165375, 185193, 912673, 1497375.

(iii) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 4$

for $D = 113$, 3773, 4563, 4913, 6534, 33275, 123462, 274625, 328509, 1442897;

and for $-D =$ 62, 82, 142, 146, 194, 686, 1026, 1242, 1681, 5329, 7546, 7921, 7986, 9522, 9747, 9826, 15842, 18634, 24334, 34295, 59319, 59582, 65910, 71874, 73002, 87750, 166375, 228150, 370386, 593190, 778034, 2185454, 14829750.

(iv) $\gamma(D) = 4$, $\gamma(-4D) = 16$ for $D =$ 4418, 88434, 249018, 598950.

(v) $\gamma(D) = 16$, $\gamma(-4D) = 4$ for $D = 12769$, 41503, 109503;

and for $-D = 20577$, 35937, 45125, 274625, 494325, 1157625, 1173942.

(vi) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 16$ for $-D =$ 137842, 913066, 986078.

(vii) $\gamma(D) = 64$, $\gamma(-4D) = 16$ for $-D =$ 389017, 1442897.

(viii) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 64$ for $-D = 1409938$.

(ix) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 9$

for $D =$ 1849, 2523, 6859, 7803, 8978, 11449, 13778, 15379, 22898, 42875, 50653, 51894, 89373, 107653, 160083, 205379, 391314, 571787, 1030301, 4492125, 7414875;

and for $-D = 1682$, 2662, 7442, 12167, 13182, 18522, 20402, 55902, 132651, 257250, 265302, 297754, 342950, 357911, 549250, 601526, 998250, 1120581, 1228250, 1714750, 2450086, 2965950, 7414875, 12326391, 24652782.

(ix) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 36$ for $D =$ 912673.

(x) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 81$ for $D = 1225043$.

(xi) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 25$ for $D =$ 536238;

and for $-D = 571787$, 1317006, 1507142, 2060602, 4108797.

(xii) $\gamma(D) = \gamma(-4D) = 49$ for $D = 300763$;

and for $-D = 453962$, 1092727.

References

[1] *G. Billing*, Beiträge zur arithmetischen Theorie ebener kubischer Kurven. Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis (4) **11** (1938), 1—165.

[2] *B. J. Birch* and *H. P. F. Swinnerton-Dyer*, Notes on elliptic curves I. J. reine u. angew. Math. **212** (1963), 7—25.

[3] *B. J. Birch*, Conjectures on elliptic curves, Amer. Math. Soc., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 8: Theory of Numbers, Pasadena 1963.

[4] *P. F. Byrd* and *M. D. Friedmann*, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

[5] *J. W. S. Cassels*, Arithmetic on curves of genus 1. I. On a conjecture of Selmer. J. reine u. angew. Math. **202** (1959), 52—99. II. A general result. J. reine u. angew. Math. **203** (1960), 174—208. III. The Tate-Šafarevič and Selmer groups. Proc. London Math. Soc. (3) **12** (1962), 259—296. IV. Proof of the Hauptvermutung. J. reine u. angew. Math. **211** (1962), 95—112.

[6] *J. W. S. Cassels*, Arithmetic on an elliptic curve. Proc. Intern. Congress Math., Stockholm **1962**, 234—246.

[7] *J. W. S. Cassels*, Arithmetic on curves of genus 1. VIII. On conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. J. reine u. angew. Math. **217** (1965), 180—199.

[8] *H. Davenport* and *H. Hasse*, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen. J. reine u. angew. Math. **172** (1934), 151—182.

[9] *M. Deuring*, Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve von Geschlechte Eins. I, II, III, IV. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (**1953**) 85—94; (**1955**) 13—42; (**1956**) 37—76; (**1957**) 55—80.

[10] *E. Forrest*, Number theory of elliptic curves. M. Sc. thesis, Cambridge 1964.

[11] *R. Fueter*, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Leipzig 1924.

[12] *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. II. Reziprozitätsgesetz. Jahresber. D. M. V. 1930 (Ergänzungsband 6), § 19.

[13] *H. Hasse*, Neue Begründung der komplexen Multiplikation I, II. J. reine u. angew. Math. **157** (1927), 115—139; **165** (1931), 64—88.

[14] *L. Holzer*, Minimal solutions of Diophantine equations. Canadian J. Math. **2** (1950), 238—244.

[15] *E. Hecke*, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. II. Math. Zeitschrift **6** (1920), 11—51.

[16] *J. L. Lagrange*, Oeuvres VII, 102—114.

[17] *Carl-Erik Lind*, Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins. Thesis, Univ. Uppsala 1940.

[18] *T. Ono*, On the Tamagawa number of algebraic tori. Annals of Math. **78** (1963) 47—73. On the relative theory of Tamagawa numbers. Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 325—326.

[19] *C. L. Siegel*, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. I, II, III. Ann. of Math. **36** (1935), 527—606; **37** (1936), 230—263; **38** (1937), 212—291.

[20] *J. Tate*, Duality theorems in Galois cohomology over number fields. Proc. Intern. Cong. Math., Stockholm **1962**, 288—295.

[21] *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Braunschweig 1898.

[22] *A. Weil*, Jacobi sums as "Grössencharaktere". Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 487—495.

[23] *A. Weil*, Adèles and algebraic groups. Mimeo notes taken by M. Demazure and T. Ono, Princeton 1961.

[24] *A. Weil*, Sur la théorie des formes quadratiques. Colloque sur la Théorie des Groupes Algebriques, Brussels 1962, 9—22.

[25] *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, A course of Modern Analysis. Cambridge 1902.

[26] *Ju. I. Manin*, Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Uspehi Math. Nauk. (Russian Math. Surveys) **18** (1963), 3—90.

[27] *J. Tate*, Algebric cohomology classes, Lecture delivered at the Summer Research Institute on Algebraic Geometry, Woods Hole 1964.

Eingegangen 25. April 1964

On solutions of the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation generated by integral operators

By *R. P. Gilbert*[1]) and *H. C. Howard*[2]) at College Park, Maryland

I. Introduction

In this page we shall use Bergman's integral operator method [1—6] to investigate solutions of the partial differential equation

$$(1.1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\mu}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+k^2 u=0,\quad \mu,\nu>0.$$

We shall refer to this equation as the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation (GBSHE), following Weinstein [28—31] who first considered fractional-dimensional space in potential theory. One is led to consider this equation initially by seeking "monochromatic" solutions $U(X, Y, t) \equiv U_1(X, Y)\, e^{\pm ikt}$ of the $(m+n=(2\mu+1)+(2\nu+1))$-dimensional wave equation

$$(1.2)\qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_m^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial y_n^2}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

which depend solely on the variables $X^2=(x_1^2+\cdots+x_m^2)$, $Y^2=(y_1^2+\cdots+y_n^2)$. Henrici has studied (1.1) in [19], and [21]; the particular case $\mu=0$ has recently been studied by Gilbert and Howard [17] while the case $k=\mu=0$ has been the object of many investigations by Weinstein [28—31], Vekua [26], Henrici [19—22], Erdélyi [9], Gilbert [11—16], Mackie [23], and Ranger [25].

Here further properties of solutions to (1.1) with $k>0$ will be investigated by using Bergman's operator method [1]. In particular, information concerning the location of singularities and the growth of solutions will be obtained.

II. Integral Operators Generating Solutions to the GBSHE

We shall just consider those solutions of the GBSHE which are of class C^2 in some neighborhood of the origin and even in x and in y. In this case we must have, for $u(x, y)$ a solution, that

$$(2.1)\qquad u_x=0 \text{ on } x=0,\ u_y=0 \text{ on } y=0.$$

[1]) This research was supported in part by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under grant AFOSR 400—64.

[2]) This research was carried out under the support of Grant NSF GP-2067 with the National Science Foundation.

Henrici has shown [21] that a complete set of solutions, regular about the origin, to this particular class of solutions (which we shall here after denote by S) is given by

$$f_n(r, t) = P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(t)\,(kr)^{-\mu-\nu} J_{\mu+\nu+2n}(kr) \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2. 2}$$

where $t = \cos 2\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, and $P_n^{(\alpha,\beta)}$ stands for the Jacobi polynomials.

One may use these facts to construct an operator which maps the class of analytic functions regular and *even* about the origin onto the class of solutions S of (1. 1) considered here. Indeed, integral representations for the members of the system (2. 2) may be obtained by use of a theorem of Henrici [21]. We have, using the notation of Erdélyi [10] (cf. also [22], p. 180, where Φ_2 should appear for Ξ_2)

$$\begin{aligned} P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(t)\,(kr)^{-\mu-\nu} J_{\mu+\nu+2n}(kr) &\equiv f_n(r, t) \\ &= \frac{\Gamma\left(\nu + n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)} \int_0^\pi \{(k\sigma)^{-\mu-\nu} J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)\} \\ &\quad \times \left\{\left(\frac{\sigma}{x}\right)^\mu \Phi_2(\mu, 1-\mu, \nu;\, \xi^1, \eta^1) \sin^{2\nu-1}\varphi\right\} d\varphi \end{aligned} \tag{2. 3}$$

where

$$\sigma = x + iy\cos\varphi, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$\xi^1 = -\frac{y^2\sin^2\varphi}{4x\sigma}, \quad \eta^1 = -\frac{k^2y^2\sin^2\varphi}{4},$$

$$k, \mu, \nu > 0, \quad \eta = 0, 1, 2, \ldots$$

We know, [21], that an arbitrary solution of the class S may be represented in a series

$$w(r, \theta) = (kr)^{-\mu-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}\, n!}{\Gamma\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)} P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(\cos 2\theta)\, J_{\mu+\nu+2n}(kr) \tag{2. 4}$$

and, [10], that an even analytic function regular about the origin may be expressed as

$$f(\sigma) = \sigma^{-\mu-\nu} \sum_0^\infty a_{2n} J_{\mu+\nu+2n}(\sigma). \tag{2. 5}$$

Hence for r sufficiently small it follows that the class of analytic functions (2. 5) is mapped onto the class solutions (2. 4) by an operator of the form

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &\equiv u(x, y) \equiv O[f] \\ &\equiv a \int_{\mathscr{L}^{-1}}^{-1} f(k\sigma)\,\sigma^\mu \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^{2\nu-1} \Phi_2(\mu, 1-\mu, \nu;\, \xi^1, \eta^1) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \tag{2. 6}$$

with

$$\sigma = x + \frac{iy}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \xi^1 = \frac{y^2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2}{16\,x\sigma},$$

$$\eta^1 = \frac{k^2y^2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}{16}, \qquad \mathscr{L} \equiv \{\zeta \mid \zeta = e^{i\varphi}, 0 \leqq \varphi \leqq \pi\}$$

and

$$a = \frac{-i(2i)^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-\mu} = \frac{2}{x^{\mu}(2i)^{2\nu}\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

For a justification of, and a motivation for, the replacement of the straight line path of integration by the given one, see Gilbert and Howard [17].

III. The Inverse Operator

It is useful to continue the arguments of the solutions $u(x, y)$ of (1. 1) to complex values. Indeed a continuation of $r^2 = x^2 + y^2$, $\xi = \cos 2\theta = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ to complex values allows one to obtain an inverse operator $O^{-1}[u]$ which maps the class of solutions S back onto the class of analytic functions (2. 5).

We consider next the problem of obtaining such an operator in the form

$$(3.\,1)\qquad f(k\sigma) = O^{-1}[u] = \int_{-1}^{1} K(\sigma, r, \xi)\, u\left(r\sqrt{\frac{1+\xi}{2}}, r\sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\right) d\xi.$$

We try to determine K such that, formally

$$(3.\,2)\qquad (k\sigma)^{-\mu-\nu} \sum_{0}^{\infty} a_{2n} J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)$$

$$= (kr)^{-\mu-\nu} \int_{-1}^{1} K(\sigma, r, \xi) \left\{ \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{2n}\, n!\, P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(\xi)}{\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)} J_{\mu+\nu+2n}(kr) \right\} d\xi.$$

This may be done by recalling the orthogonality relation for the Jacobi polynomials

$$(3.\,3)\qquad \int_{-1}^{1} (1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}} P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(\xi)\, P_m^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(\xi)\, d\xi$$

$$= \delta_{m,n} \frac{2^{\mu+\nu}\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2n+\mu+\nu)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\mu+\nu)}.$$

Thus if we define[3])

$$(3.\,4)\qquad K_n(\sigma, r, \xi) \equiv \frac{1}{2^{\mu+\nu}} b_n \left(\frac{kr}{k\sigma}\right)^{\mu+\nu} \frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kr)} P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(\xi)\,(1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}}$$

where

$$b_n = \frac{(2n+\mu+\nu)\,\Gamma(n+\mu+\nu)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}$$

we have

$$a_{2n}(k\sigma)^{-\mu-\nu} J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma) = \int_{-1}^{1} K_n(\sigma, r, \xi)\, u\left(r\sqrt{\frac{1+\xi}{2}}, r\sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\right) d\xi.$$

[3]) A discussion is given below on how to modify the kernel K if any of the quantities $J_{\mu+\nu+2n}(kr)$ vanish.

Hence

$$(3.5)\qquad f(k\sigma) = \int_{-1}^{1} K(\sigma, r, \xi)\, u\left(r\sqrt{\frac{1+\xi}{2}}, r\sqrt{\frac{1-\xi}{2}}\right) d\xi$$

where

$$K(\sigma, r, \xi) = \frac{1}{2^{\mu+\nu}}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^{\mu+\nu}(1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}}$$
$$\times \sum_0^\infty (2n+\mu+\nu)\frac{\Gamma(n+\mu+\nu)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}\frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kr)}P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi).$$

We now show that these formal calculations can be justified, and also that K as a function of the complex variables, σ, r, and ξ, is holomorphic.

We note first that, except for factors independent of the parameter of summation, K_n can be written as

$$(3.6)\qquad K_n(\sigma, r, \xi) = (2n+\mu+\nu)\frac{\Gamma(n+\mu+\nu)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}\frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kr)}P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi).$$

But we have that (cf. [27], p. 225) for all n sufficiently large

$$\left|\frac{\Gamma(n+\mu+\nu)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}\right| \sim (n+\mu)^{\nu-\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kr)}\right| \sim \left|\frac{\sigma}{r}\right|^{2n+\mu+\nu}.$$

Hence there exists a positive integer, α say, such that for all n sufficiently large

$$|K_n| \leqq n^\alpha \left|\frac{\sigma}{r}\right|^{2n} \left|P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi)\right|.$$

But for ξ fixed and lying in the compact ellipse

$$E \equiv \{\xi \mid |1+\xi| + |1-\xi| \leqq 2+\varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0 \text{ and sufficiently small})$$

we have

$$(3.7)\qquad \sum_0^\infty T^n P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi) = 2^{\mu+\nu-1}R^{-1}(1-T+R)^{-\nu+\frac{1}{2}}(1+T+R)^{-\mu+\frac{1}{2}}$$

where $|T| < 1$, $R \equiv (1-2\xi T+T^2)^{\frac{1}{2}}$ (and $R = 1$ where $T = 0$) so the series in (3.7) converges absolutely and uniformly for $|T| \leqq \varrho < 1$.

In similar fashion (cf. Gilbert and Howard [17]) the series

$$(3.8)\qquad \sum_0^\infty n^\alpha\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{2n} P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi) = \left\{\left(T\frac{\partial}{\partial T}\right)^\alpha \sum_0^\infty T^n P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi)\right\}_{T=(\frac{\sigma}{r})^2}$$
$$= \left\{\left(T\frac{\partial}{\partial T}\right)^\alpha \left(2^{\mu+\nu-1}R^{-1}(1-T+R)^{-\nu+\frac{1}{2}}(1+T+R)^{-\mu+\frac{1}{2}}\right)\right\}_{T=(\frac{\sigma}{r})^2}$$

is seen to converge absolutely and uniformly, so (3.5) holds. Moreover it is clear from these considerations that K is bounded on the compact set $E \times F \equiv G$ where $F \equiv \left\{\frac{\sigma}{r} \,\middle|\, \left|\frac{\sigma}{r}\right| \leqq \varrho < 1\right\}$ provided $G \cap H = 0$ where $H = \left\{\xi, \frac{\sigma}{r} \,\middle|\, 1 - 2\xi\frac{\sigma}{r} + \left(\frac{\sigma}{r}\right)^2 = 0\right\}$. In this case we may use the elementary Hartog's theorem concerning bounded series

which are analytic in each variable separately to infer that $K(\sigma, r, \xi)$ is a holomorphic function of the complex variables σ, r, and ξ, simultaneously, [7].

We remark that, in general, r in the above discussions is considered as a fixed parameter such that it is not a root of the equations $J_{\mu+\nu+2n}(kr) = 0$. However there may be times when we wish to vary r; in this case if r is ever a root of the equation $J_{\mu+\nu+2n}(kr) = 0$, $n = n_1, n_2, \ldots$, then we omit these terms from the kernel, as

$$K^1(\sigma, r, \xi) \equiv \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_i}}^{\infty} K_n(\sigma, r, \xi). \tag{3.9}$$

Using this modified kernel K^1, $O^{-1}[u]$ maps u back onto f since in this case there is no term involving $J_{\mu+\nu+2n}$ in the series for u.

We next obtain a useful lemma concerning the singularity manifold of K. We have that K has as its singularity manifold those points for which (3. 8) is singular ($\xi^2 \neq +1$, to exclude the possible cases of $K \equiv 0$). We have

Lemma 3. 1. *The kernel K used in the inverse operator $O^{-1}[u]$ has as its singularity manifold those points $(\sigma, \xi) \in C^2(r)$ which lie on the locus*

$$L \equiv \left\{(\sigma, \xi) \,\middle|\, 1 - 2\xi\left(\frac{\sigma}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{r}\right)^4 = 0\right\}.$$

Proof. From the preceding discussions we realize that the series representation for K does not converge on L. If r is a root of $J_{\mu+\nu+2n}(kr) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ by definition we omit these terms from the kernel; thus the first N terms (N sufficiently large) form a well — defined entire function in the variables, whereas the remaining terms approximate arbitrarily closely a function whose only singularities lie on L. This proves the lemma.

IV. Location of Singularities

We now list several theorems concerning the location of singularities of solutions of the GBSHE. The proofs are similar to those given in Gilbert [11—16] and the reader is referred to these papers for details.

Theorem 4. 1. *Let $u(x,y) = O[f]$ where $f(\sigma)$ is an even analytic function whose finite singularities are at $\sigma = \pm\alpha$. Then the only possible singularities of $u(x, y)$ (except perhaps for points on the x and y axes) lie at $z = \pm\alpha/k$ and $\pm\bar{\alpha}/k$.*

Indeed, by applying the *envelope method* (cf. Gilbert [11—16]) one sees that the only possible singularities of u must lie on the intersection

$$\{S(x, y, \varphi) \equiv (k\sigma - \alpha)(k\sigma + \alpha) = 0\} \cap \left\{\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0\right\}, \quad \sigma = x + iy\cos\varphi.$$

Hence $(x + iy\cos\varphi)^2 - \alpha^2/k^2$ when differentiated and set equal to zero gives $\sin\varphi = 0$. Using $\cos\varphi = \pm 1$ and $(x + iy\cos\varphi) = \pm\alpha/k$ one obtains the desired result immediately.

We also have

Theorem 4. 2. *Let $u(x, y)$ be a solution of the* GBSHE *whose only finite singularities lie in the set*

$$\left\{\left(z^2 - \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)\left(z^2 - \left(\frac{\bar{\alpha}}{k}\right)^2\right) = 0\right\} \equiv \left\{(r, \xi) \,\middle|\, \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2k^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{k^2r^2}\right)\right\}, \quad \xi = \cos 2\theta.$$

Then the only possible singularities of the 0*-associate* $f(k\sigma)$ (*not on the axes*) *are at the points in the set* $\{k\sigma = +\alpha, -\alpha, 0\}$.

For if u be singular at $\left\{r, \xi \mid \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2k^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{k^2r^2}\right)\right\}$ and if, by Lemma 3. 1, the kernel of the inverse operator has as its singularity manifold $\left\{\xi, \sigma, r \mid 1 - 2\xi\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{r}\right)^4 = 0\right\}$ then we know that the possible singularities of $f(k\sigma)$ are at

$$\left\{S(\sigma, r) \equiv r^4 - 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r^2k^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{k^2r^2}\right)\right]\sigma^2r^2 + \sigma^4 = 0\right\} \cap \left\{\frac{\partial S}{\partial r} = 0\right\}.$$

We get that

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 - r^4\frac{k^2\sigma^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{k^2}\sigma^2 + \sigma^4\right) = 4r^3\left[1 - \frac{k^2\sigma^2}{\alpha^2}\right].$$

Thus $\frac{\partial S}{\partial r} = 0$ gives $k\sigma = \pm\alpha$, or $r = 0$, which when introduced into $S(\sigma, r) = 0$, implies $\sigma^2\left(\sigma^2 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) = 0$ which is the desired result.

Combining these last two results we have the following "fundamental" theorem concerning singularities of GBSHE functions.

Theorem 4. 3. *With the exception of points on the* x *and* y *axes a necessary and sufficient condition for* $u(x, y)$ *to be singular at* $z = \pm\alpha/k$, $\pm\bar{\alpha}/k$ *is for its* 0*-associate,* f, *to be singular at* $k\sigma = \alpha$, *or* $k\sigma = -\alpha$.

With this theorem one is able to transplant theorems about the location of singularities from classical function theory to the theory of solutions of the GBSHE. We may list results such as those given in Section IV of [16]. A sample is given below.

Theorem 4. 4. *A GBSHE function* $w(r, \theta)$ *which has the series representation*

$$w(r, \theta) = (kr)^{-\mu-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n n!}{\Gamma\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)} P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})}(\cos 2\theta)\, J_{\mu+\nu+2n}(kr)$$

about $z = 0$ *converges uniformly and absolutely in any compact subset of its disk of convergence,* $|z| < \varrho$, *where*

$$\varrho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

V. Bounds for GBSHE Functions

In this section we obtain growth properties of entire GBSHE functions, with these results being independent of individual associates of the GBSHE functions. We have first a definition and a lemma.

Definition. *A GBSHE function* $u(x, y)$ *with the series representation* (2. 4) *is said to be entire if and only if it has an infinite radius of convergence, that is, if and only if* $\limsup_{n\to\infty} |a_{2n}|^{1/2n} = 0$.

Suppose $f(k\sigma)$ is regular in a neighborhood of $|\sigma| \leqq R$; then we may obtain a bound for $|u|$ in terms of the maximum modulus $\widetilde{M}(R)$ of $f(k\sigma)$ on $|\sigma| = R$. For instance, we have from (2. 6)

$$|u(x, y)| \leqq |a| \cdot R^{\mu}\widetilde{M}(R)\int_0^{\pi} |2i\sin\varphi|^{2\nu-1}\,|\Phi_2|\,d\varphi \tag{5. 1}$$

with a and Φ_2 as in (2. 6). But (cf. [22]) we can rewrite Φ_2 as

$$(5.\,2)\quad \Phi_2 = \left(\frac{ky}{2}\right)^{1-\nu} \Gamma(\nu) \sin^{1-\nu}\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu)_m(1-\mu)_m}{m!} \left(\frac{-y\sin\varphi}{2kx(x+iy\cos\varphi)}\right) \times J_{\nu+m-1}(ky\sin\varphi).$$

Using the triangle inequality and known appraisals for the Bessel functions, see [27], p. 49, we get, for $\mu \neq 1, 2, \ldots,$[4])

$$(5.\,3)\quad |u| \leqq \left(\frac{R}{x}\right)^{\mu} \frac{\widetilde{M}(R)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|(\mu)_m(1-\mu)_m|}{m!\,\Gamma(m+\nu)} \left(\frac{y^2}{4x^2}\right)^m \int_0^{\pi} (\sin\varphi)^{2m+2\nu-1} d\varphi$$

$$= \left(\frac{R}{x}\right)^{\mu} \frac{\widetilde{M}(R)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|(\mu)_m(1-\mu)_m|}{m!\,\Gamma(m+\nu)} \left(\frac{y^2}{4x^2}\right)^m \frac{\Gamma(m+\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{R}{x}\right)^{\mu} \frac{\widetilde{M}(R)}{\Gamma(\mu)\,|\Gamma(1-\mu)|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+m)\,|\Gamma(m+1-\mu)|}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(m+\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{y^2}{4x^2}\right)^m$$

$$\equiv \gamma \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m, \quad \zeta < 1.$$

By use of known asymptotic formulae for $\log \Gamma(z+\alpha)$, see [9], Vol. I, p. 47, we have that if M be the smallest integer, such that

$$\frac{9[(1+\mu)^3 + (1+\nu)^3]}{M} < \frac{1}{10},$$

say, then, from (5. 3),

$$(5.\,4)\qquad |u| \leqq \gamma \left[\sum_{0}^{M-1} a_m \zeta^m + \sum_{M}^{\infty} \frac{1}{m^{\nu+1}} (\zeta)^m\right].$$

By use of the Cauchy-Schwartz inequality the second term has an upper bound of

$$\sqrt{\sum_{M}^{\infty} \frac{1}{m^{2+2\nu}}} \sqrt{\sum_{M}^{\infty} (\zeta^2)^m} \leqq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\, \zeta^m \sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}}.$$

Hence

$$|u| \leqq \gamma \left[\sum_{0}^{M-1} a_m \zeta^m + \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \frac{\zeta^M}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right], \quad \zeta < 1.$$

This inequality gives bounds only in the "double wedge" defined by $y^2 < 4x^2$. Thus we have

Lemma 5. 1. *Let u be a GBSHE function defined in the disk $r \leqq R$ by the operator $O[f]$. Furthermore, let the associate function $f(k\sigma)$ have a maximum modulus $\widetilde{M}(R)$ on $|\sigma| = R$. Then*

$$|u(x,y)| \leqq \left(\frac{R}{x}\right)^{\mu} \frac{\widetilde{M}(R)}{\Gamma(\mu)\,|\Gamma(1-\mu)|} \left[\sum_{0}^{M-1} \frac{\Gamma(\mu+m)\,|\Gamma(m+1-\mu)|}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(m+\nu+\frac{1}{2}\right)} \zeta^m + \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \frac{\zeta^M}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$

whenever $x \neq 0$, and $\zeta = \dfrac{y^2}{4x^2} < 1$, where M is the smallest integer such that

$$\frac{9[(1+\mu)^3 + (1+\nu)^3]}{M} < \frac{1}{10}.$$

[4]) If $\mu = 1$ or $2, \ldots$ then the series in (5. 2) reduces to a polynomial and the desired appraisals are easily obtained.

With information of this type we are able to obtain upper and lower bounds for the maximum modulus of an entire GBSHE function, at least for certain ranges of x and y. For instance we have the following result:

Theorem 5. 2. *Let $u(x, y)$ be an entire GBSHE function with series representation* (2. 4); *then for R sufficiently large and any $\varepsilon > 0$ there exists $a\lambda \geqq 0$ such that the maximum modulus, $M(R)$, of $u(x, y)$ for x and y such that $y^2 < 4x^2$ is bounded above by $M(R) < e^{R^{\lambda+\varepsilon}}$. Moreover, if the order of the associate, f, of u is $\lambda > 1$, then the maximum modulus, for all x and y, is bounded below by $e^{R^{\lambda-\varepsilon}} < M(R)$.*

The first assertion follows at once from Lemma 5.1 and the fact that

$$|f| \leqq \widetilde{M}(R) < e^{R^{\lambda+\varepsilon}},$$

since the associate, f, of u is entire. In order to obtain a lower bound for the maximum modulus we consider the inverse operator $O^{-1}[u]$; one has

$$(5.5) \qquad |f(k\sigma)| \leqq M(R) \int_{-1}^{1} |K(\sigma, R, \xi)|\, d\xi \quad \text{for } 1 \leqq |\sigma| \leqq \varrho < R$$

with K given by (3. 5). In order to bound $|K|$ we proceed as follows. Noting

$$(5.6) \quad K(\sigma, R, \xi) = \frac{1}{2^{\mu+\nu}} \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{\mu+\nu} (1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{ \sum_{n=0}^{N} (2n+\mu+\nu) \frac{\Gamma(n+\mu+\nu)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)} \frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kR)} P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (\quad '' \quad) \right\},$$

we see that for any fixed R we can find $N = N(R)$ sufficiently large such that

$$\left| \frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kR)} \right| \sim \left(\left| \frac{\sigma}{R} \right| \right)^{\mu+\nu+2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{for } n \geqq N.$$

Indeed $N \sim [kR]/2$ will suffice, since the first zero of $J_\lambda(z)$ for λ real and large is at $\lambda + O(\lambda^{1/3})$ and we can thus divide the asymptotic expansions of [27], page 225, for $J_\lambda(z)$ with λ large and z fixed. Hence, for $1 \leqq |\sigma| \leqq \varrho < R$ we have

$$(5.7) \quad |K| \leqq \frac{1}{2^{\mu+\nu}} \left(\frac{R}{1}\right)^{\mu+\nu} (1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{ \left| \sum_{n=0}^{N} (2n+\mu+\nu) \frac{\Gamma(n+\mu+\nu)}{\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)} \frac{J_{\mu+\nu+2n}(k\sigma)}{J_{\mu+\nu+2n}(kR)} P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(\xi) \right| + c \sum_{n=N+1}^{\infty} n^\alpha \left| \frac{\sigma}{R} \right|^{\mu+\nu+2n} \right\}$$

by use of known appraisals for Jacobi, polynomials and $\Gamma(z+\alpha)$ (cf. [9] Vol. 2, p. 206. and Vol. 1, p. 47) where c and α are positive constants depending only upon μ and ν, Using (5. 7) in (5. 5) we get, for $1 \leqq |\sigma| \leqq \varrho < R$,

$$(5.8) \quad |f(k\sigma)| \leqq R^{\mu+\nu} \left\{ |\widetilde{K}_N| + c \cdot 2 \frac{\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\mu+\nu}}{\left(1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right)^{\alpha+1}} \right\} \int_{-1}^{1} (1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}} d\xi$$
$$= R^{\mu+\nu} \left\{ |K_N| + \frac{c_1 (\varrho/R)^{\mu+\nu}}{(1-(\varrho/R)^2)^{\alpha+1}} \right\},$$

with $\widetilde{K}_N$ standing for the partial sum in the brace of (5. 7), K_N being $\widetilde{K}_N$ multiplied by the integral,

$$c_1 = 2c\,\Gamma(\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-\xi)^{\nu-\frac{1}{2}}(1+\xi)^{\mu-\frac{1}{2}}\,d\xi$$

and a result to be found in Bromwich [7], p. 50, has been used to appraise the infinite series in (5. 7). But $|f(k\sigma)|$ is an increasing function of $|\sigma|$ for f entire so (5. 8) holds for $0 \leqq |\sigma| \leqq \varrho < R$.

If $\widetilde{M}(\varrho) = e^{\varrho^\lambda}$ is the maximum modulus of $f(k\sigma)$ for $|\sigma| \leqq \varrho < R$ then

$$e^{\varrho^{\lambda-\varepsilon'}} < \widetilde{M}(\varrho) \leqq R^{\mu+\nu}\left\{|K_N| + \frac{(c_1)\,(\varrho/R)^{\mu+\nu}}{(1-(\varrho/R)^2)^{\alpha+1}}\right\} M(R) \text{ for all } \varepsilon' > 0.$$

By setting $\varrho = \varrho_0 = \Omega R$ $(0 < \Omega < 1)$ one has for *some* $\varepsilon > 0$ and R sufficiently large

$$e^{R^{\lambda-\varepsilon}} = \frac{e^{\varrho_0^{\lambda-\varepsilon'}}}{R^{\mu+\nu}\left\{|K_N| + \dfrac{c_1(\Omega)^{\mu+\nu}}{(1-\Omega^2)^{\alpha+1}}\right\}} < M(R)$$

where $N = N(R) \sim [kR]/2$. We wish to show that by choosing R large enough that ε is of the same order of magnitude as ε'. One has

$$R^{-\varepsilon} = \frac{\varrho_0^{\lambda-\varepsilon'}}{R^\lambda} - (\mu+\nu)\frac{\log R}{R^\lambda} - \frac{1}{R^\lambda}\log\left(|K_N| + \frac{c_1(\Omega)^{\mu+\nu}}{(1-\Omega^2)^{\alpha+1}}\right). \tag{5. 9}$$

We now show that last term on the right of equation (5. 9) tends to zero as $R \to \infty$. By use of the triangle inequality and known appraisals for the Bessel functions, gamma functions, and Jacobi polynomials one has, for R sufficiently large,

$$|K_N| \leqq (2N+\mu+\nu)\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(N+\mu+\nu)}{(1/4)}\,\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\mu+\nu+2n}e^{kR}}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\,\frac{1}{|J_{\mu+\nu+2n}(kR)|}\,m(n) \tag{5. 10}$$

where

$$m(n) = \max\left[\binom{n+\mu-\frac{1}{2}}{n}, \binom{n+\nu-\frac{1}{2}}{n}\right].$$

From (5. 10) we get

$$|K_N| = O\left(R^{1+\beta}\,\Gamma(R)\,R^R\,e^R\right)\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{|J_{\mu+\nu+2n}(kR)|} \tag{5. 11}$$

where β is a positive constant, dependent on μ and ν, and comes from the bound for the Jacobi polynomials.

We now appraise the sum appearing in (5. 11). We note that in any interval of length π/k, call it I, say, each of the functions $\{J_{\mu+\nu+2n}(kR)\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, has at most one zero. Hence in I there exists at least one point whose distance from all the zeros of the functions of the set $\{J_{\mu+\nu+2n}(kR)\}$ is at least $\dfrac{\Pi}{2k[N+2]} = O\left(\dfrac{1}{N}\right)$. By an inspection of known asymptotic formulae for Bessel functions (cf., in particular, [24], pp. 22 and 24) we see that, asymptotically, Bessel functions may be written as $J = \varphi(x)\,\Phi(x)$ where $\varphi(x) \to 0$ as $x \to \infty$, and $\Phi(x)$ is a linear combination of sines and cosines, with coefficients dependent only upon the order of the function. Moreover for $m = 0, 1, \ldots, N \sim [kR]/2$ it is an easy calculation, using the cited reference [24] to show that

$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ with $\frac{1}{3} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$; the details of this calculation are left, accordingly, to the reader. Hence we have an appraisal of the form $|J_{\mu+\nu+2n}(kR)| \geqq \frac{c}{(kR)^{\frac{1}{2}}(kR)}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ for some positive constant c independent of all parameters. The factor $1/kR$ is a contribution from the Φ portion of the general expression just given for Bessel functions; we assume, of course, that kR is such that none of the Bessel functions vanish there and so, by previous remarks, may be assumed to be distant by an amount $O\left(\frac{1}{R}\right)$ from any zero of the Bessel functions. But sine and cosine have simple zeros, hence the result. Returning to (5. 11) we have

$$|K_N| = O\left(R^{1+\beta+\frac{3}{2}}\Gamma(R)\, R^R e^R\right), \text{ so } \log|K_N| = O(R \log R) \text{ as } R \to \infty.$$

Hence, since $\lambda > 1$, $\frac{1}{R^\lambda} \log|K_N| \to 0$ as $R \to \infty$. From (5. 9) we have

$$-\varepsilon \log R \sim (\lambda - \varepsilon') \log \Omega R - \lambda \log R \text{ as } R \to \infty \text{ so } \varepsilon \sim \varepsilon' - \lambda - (\lambda - \varepsilon') \frac{\log \Omega}{\log R} + \lambda.$$

Thus ε' for $R \to \infty$ is of the same magnitude as ε. Thus $e^{R^{\lambda-\varepsilon}} < M(R)$ for $\varepsilon > 0$ and R sufficiently large. This proves the theorem.

We finally prove a result which will be useful in obtaining growth estimates for solutions of the GBSHE in terms of their Jacobi-Bessel coefficients, cf. (2. 4). We need the following lemma.

Lemma 5. 3. *Let $f(z)$ be an even entire function with the following Neumann series representation*

$$f(z) = z^{-\mu-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} J_{\mu+\nu+2n}(z).$$

Suppose also $f(z)$ has an order greater than one. Then, a necessary and sufficient condition for $f(z)$ to be of order at most λ is that the inequality $|a_{2n}| \leqq (2n)^{2n(1-(1/\lambda-\varepsilon))}$ holds for any $\varepsilon > 0$, if n be sufficiently large.

We prove the necessity of the condition first. By hypothesis $f(z)$ is entire, and therefore has a Taylor series representation of the form

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} b_{2n} z^{2n}$$

such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1/|b_{2n}|)}{2n \log 2n} \geqq \frac{1}{\lambda}. \tag{5. 13}$$

But the Taylor and Neumann coefficients are related by the expressions (cf. [9], Vol. 2, pp. 63—64).

$$a_{2n} = 2^{\mu+\nu+2n}(\mu+\nu+2n) \sum_{s=0}^{s=n} 2^{-2s} \frac{\Gamma(\mu+\nu+2n-s)}{\Gamma(s+1)} b_{2n-2s}$$

and

$$b_{2n}\Gamma(\mu+\nu+2n+1) = 2^{-2n-\mu-\nu} \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m \binom{\mu+\nu+2n}{m} a_{2n-2m}.$$

From (5. 13) we get, for some constant c, $|b_{2n}| \leqq c(2n)^{-2n(1/\lambda-\varepsilon')}$, for any $\varepsilon' > 0$, and all n. Hence

$$|a_{2n}| \leqq c 2^{\mu+\nu+2n}(\mu+\nu+2n) \sum_{s=0}^{n} 2^{-2s} \frac{\Gamma(\mu+\nu+2n-s)}{\Gamma(s+1)} (2n-2s)^{-(2n-2s)(1/\lambda-\varepsilon')}. \tag{5. 14}$$

But since the largest term in the last sum to an $n \log n$ approximation, occurs at $s = 0$[5]), we have the estimate

$$| a_{2n} | \leqq c \cdot 2^{\mu+\nu+2n}(\mu + \nu + 2n)\,(n + 1)\,\Gamma(\mu + \nu + 2n)\,(2n)^{-2n(1/\lambda-\varepsilon')}.$$

Thus

$$\frac{\log | a_{2n} |}{2n \log 2n} \leqq O\left(\frac{1}{\log 2n}\right) + 1 - (1/\lambda - \varepsilon'),$$

so for all n sufficiently large we conclude that

$$| a_{2n} | \leqq (2n)^{2n(1-(1/\lambda-\varepsilon))}, \quad \varepsilon > 0,$$

the desired result.

For the sufficiency suppose $| a_{2n} | \leqq (2n)^{2n(1-(1/\lambda-\varepsilon'))}$ for any $\varepsilon' > 0$, provided n is sufficiently large. Then we can bound $| b_{2n} |$, for some suitable constant c, as

$$| b_{2n} | \, \Gamma(\mu + \nu + 2n + 1) \leqq c 2^{-2n-\mu-\nu} \sum_{m=0}^{n} \binom{\mu + \nu + 2n}{m} (2n - 2m)^{(2n-2m)(1-(1/\lambda-\varepsilon'))}.$$

As in the proof of the necessity we find that the largest term, up to a $n \log n$ approximation, occurs for $m = 0$. Hence

$$| b_{2n} | \leqq 2^{-2n-\mu-\nu} \frac{c(n+1)\,(2n)^{2n(1-(1/\lambda-\varepsilon'))}}{\Gamma(\mu+\nu+2n+1)}.$$

Hence as $n \to \infty$ we find

$$\frac{\log | b_{2n} |}{2n \log 2n} \leqq O\left(\frac{1}{\log 2n}\right) + -(1/\lambda - \varepsilon') = -(1/\lambda - \varepsilon)$$

for any $\varepsilon > 0$, provided n is sufficiently large. But this is equivalent to saying $f(z)$ has order at most λ, the desired result.

Finally, we have the following theorem.

Theorem 5. 4. *Let the notation be that of Lemma* 5. 1. *Let $u(x, y)$ be an entire GBSHE function with a series representation in terms of Bessel Jacobi functions as given in* (2. 4). *Furthermore, if $| a_{2n} | \leqq (2n)^{2n(1-(1/\lambda-\varepsilon))}$ for some $\lambda > 1$ and any $\varepsilon > 0$, provided n is sufficiently large, then $u(x, y)$ is bounded by $| u(x, y) | \leqq e^{r^{\lambda+\varepsilon}}$ in the "double wedge" $y^2/4x^2 < 1$, as $r \to \infty$.*

This follows at once from Lemmas 5. 1 and 5. 3. One can also obtain a lower bound on the maximum modulus by use of Theorem 5. 2.

References

[1] *S. Bergman*, Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations, Ergebn. Math. u. Grenzgeb. **23**, Berlin (1960).

[2] *S. Bergman*, Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen Funktionen des dreidimensionalen Raumes, Math. Z. **24** (1926), 641—669.

[3] *S. Bergman*, Zur Theorie der algebraischen Potentialfunktionen des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann. **99** (1929), 629—659; ibid., **101** (1929), 534—538.

[4] *S. Bergman*, Classes of Solutions of Linear Partial Differential Equations in Three Variables, Duke Math. Journal **13** (1946), 419—458.

[5]) To see this put $s = n\theta$, $0 < \theta < 1$, in the general term y_n of the sum of (5. 14). The conclusion then follows at once from an inspection of $\log y_n(\theta)$, for n large. The assumption $\lambda > 1$ is crucial here. Cf. [18].

[5] *S. Bergman*, Some Properties of a Harmonic Function of Three Variables Given by its Series Development, Arch. Rat. Mech. Anal. 8 (1961), 207—222.

[6] *S. Bergman*, Multivalued Harmonic Functions in Three Variables, Comm. Pure and Appl. Math. **9** (1956), 327—338.

[7] *C. Caratheodory*, Function Theory, Vol. 2, New York 1950.

[8] *P. Dienes*, The Taylor Series, Oxford 1931.

[9] *A. Erdélyi*, Singularities of Generalized Axially Symmetric Potentials, Comm. Pure and Appl. Math. **9** (1956), 403—414.

[10] *A. Erdélyi*, et al. Higher Transcendental Functions, Vol. I, II, New York 1953.

[11] *R. Gilbert*, On the Singularities of Generalized Axially Symmetric Potentials, Arch. Rat. Mech. Anal. **6** (1960), 171—176.

[12] *R. Gilbert*, On Generalized Axially Symmetric Potentials, J. Reine Angew. Math. **212** (1963), 158—168.

[13] *R. Gilbert*, Some properties of Generalized Axially Symmetric Potentials, Amer. J. Math. **84** (1962), 475—484.

[14] *R. Gilbert*, Bergman's Integral Operator Method in Generalized Axially Symmetric Potential Theory, J. Mathematical Physics (7) **5** (1964), 983—997.

[15] *R. Gilbert*, Poisson's Equation and Generalized Axially Symmetric Potential Theory, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **61** (1963), 337—348.

[16] *R. Gilbert*, Integral Operator Methods in Bi-axially Symmetric Potential Theory, Contrib. to Differential Equations **2** (1963), 441—456.

[17] *R. P. Gilbert* and *H. C. Howard*, On a Class of Elliptic Partial Differential Equations, TN BN-344 **1963**, Fluid Dyn. Inst., Univ. of Md.

[18] *R. P. Gilbert* and *H. C. Howard*, On Solutions of the Generalized Axially Symmetric Wave Equation Represented by Bergman Operators, TN BN-350, **1964**, Fluid Dyn. Inst., Univ. of Md., to appear also in the Proceedings of London Math. Soc.

[19] *P. Henrici*, Zur Funktionentheorie der Wellengleichung, Commentarii Mathematici Helvetici **27** (1953), 235—293.

[20] *P. Henrici*, On the Domain of Regularity of Generalized Axially Symmetric Potentials. Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 29—31.

[21] *P. Henrici*, Complete Systems of Solutions for a Class of Singular Elliptic Partial Differential Equations, Boundary Problems in Differential Equations, Univ. of Wis. Press, Madison, Wis. **1960**, 19—34.

[22] *P. Henrici*, A Survey of I. N. Vekua's Theory of Elliptic Partial Differential Equations with Analytic Coefficients, Z. Angew. Math Phys. **8** (1957), 169—203.

[23] *A. Mackie*, Contour Integral Solutions of a Class of Differential Equations, J. Rat. Mech. and Anal. **4** (1955), 733—750.

[24] *W. Magnus* and *F. Oberhettinger*, Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics, New York 1954.

[25] *K. Ranger*, Some Integral Transformation Formulae for the Stokes-Beltrami Equations, J. of Math. and Mech. **12** (1963), 663—74.

[26] *I. Vekua*, Novye Metody Rešenija Elliptičeskikh Uravnenji, OGIZ, Moskow and Leningrad 1948.

[27] G. *Watson*, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd Edition, New York 1944.

[28] *A. Weinstein*, Discontinuous Integrals and Generalized Potential Theory, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 342—354.

[29] *A. Weinstein*, Generalized Axially Symmetric Potential Theory, Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 20—38.

[30] *A. Weinstein*, The Method of Axial Symmetry in Partial Differential Equations, Dagli Atti del Convegno internazionale sulle Equazioni alle derivate parziali, Trieste 1954.

[31] *A. Weinstein*, Transonic Flow and Generalized Axially Symmetric Potential Theory. Proc. Naval Ord. Lab. Aeroballistics Symp., White Oak, Md. **73** (1949).

Eingegangen 2. Mai 1964

Weak perfect compactness and generalized adjoints*)

By *D. R. Arterburn* at New Mexico (N. M.) and Montana (Mont.)

The purpose of this paper is to answer some of the questions posed in [5] and to extend the concept of perfect compactness. If X is a normed linear space and Y is a topological linear space, an operator $T\colon X \to Y$ is *perfectly* (*fully*) *compact* iff the *reduced* operator $T_0\colon X \to R(T)$ defined by $T_0(x) = x$ $(x \in X)$ is compact (respectively, iff $T(S)$ is compact, where S is the closed unit sphere of X.) A Banach space X is *perfect* iff Y a Banach space and $T\colon X \to Y$ compact imply T perfectly compact. A B-space X is *imperfect* iff given an infinite-dimensional B-space Y there is an imperfectly compact $T\colon X \to Y$. A B-space X is *mixed* iff X is neither perfect nor imperfect. It is not yet known whether any mixed spaces exist.

1. It is questioned in [5] whether or not the topological direct sum of two perfect spaces is perfect. The following theorem answers this question in the affirmative.

1.1 Theorem. *The direct sum of two perfect spaces is perfect. The direct sum of a perfect space and a mixed space is mixed.*

Proof. Let $X = X_1 \oplus X_2$. Let Y be a B-space with every compact $T_1\colon X_1 \to Y$ and $T_2\colon X_2 \to Y$ perfectly compact. Let $T\colon X \to Y$ be compact, and let P_1 and P_2 be the projection of X onto X_1 and X_2 respectively. Let T_1 be the reduction of $T \mid X_1$ to $R(T)$, T_2 the reduction of $T \mid X_2$ to $R(T)$. Then T_1 and T_2 are compact since $R(T_1) > R(T \mid X_1)$ and $R(T_2) > R(T \mid X_2)$, so $T_1 P_1$ and $T_2 P_2$ are compact, whence

$$T_0 = T_0(P_1 + P_2) = T_0 P_1 + T_0 P_2 = T_1 P_1 + T_2 P_2$$

is compact. Thus T is perfectly compact.

Now if $T\colon X_2 \to Z$ is imperfectly compact, $T P_2\colon X \to Z$ is imperfectly compact. The theorem follows.

2. If X is a normed linear space and Y induces a topology on X in some fashion, $(X, \Upsilon Y)$ will denote the topological space X with the induced topology. For example, $(X, \Upsilon X')$ will denote X with the usual weak topology.

If X and Y are normed linear spaces and $T\colon X \to Y$, T will be called *perfectly weakly compact* iff $T_0(S)$ is weakly conditionally compact; T will be called *fully weakly*

*) This paper constitutes part of the author's dissertation, submitted to the Graduate School of New Mexico State University in partial fulfillment of the requirements for the Ph. D. in Mathematics written while the author was an N. S. F. Coop. Graduate Fellow, with partial support from NSF-G25058 and AF-AFOSR 457—63.

compact iff $T(S)$ is weakly compact. A B-space X will be called *weakly perfect* iff for every B-space Y and weakly compact $T\colon X \to Y$, T is perfectly weakly compact. A B-space X is *weakly imperfect* iff given an infinite-dimensional B-space Y there exists a weakly compact $T\colon X \to Y$ which is not perfectly weakly compact.

A B-space is *weakly mixed* iff it is neither weakly perfect nor weakly imperfect.

If X and Y are normed linear spaces it is easily seen that a map $T\colon X \to Y$ is perfectly weakly compact iff $T_0\colon X \to (R(T), \Upsilon Y' \mid R(T))$ is compact.

2.1 Lemma. *Let X and Y be normed linear spaces. A compact operator $T\colon X \to Y$ is fully [perfectly] compact iff fully [perfectly] weakly compact.*

Proof. (a) If T is fully compact, $T(S)$ is compact, hence weakly compact.

If T is not fully compact, $T(S)$ is not closed, hence not weakly closed, so $T(S)$ cannot be weakly compact.

(b) If T is perfectly compact, $T(S)^-$ (closure with respect to $R(T)$) is compact, hence weakly compact. But $T(S)^-$ coincides with the $R(T)'$ closure of $T(S)$, so T is perfectly weakly compact.

If T is not perfectly compact, there is a sequence $\{y_n\} \subset T(S)$ which converges to $y \notin R(T)$. Then every subsequence of $\{y_n\}$ converges weakly to y, whence $T(S)^-$ (closure with respect to $R(T)'$ topology) is not weakly sequentially compact, so is not weakly compact. Hence T is not perfectly weakly compact.

The following analogues of [5, lemma 2] and [5, lemma 4] are readily established.

2.2 Lemma. *Let W, X, Y and Z be normed linear spaces.*

(i) *If $P\colon W \to X$ is onto X, $T\colon X \to Y$ is perfectly weakly compact, and $U\colon Y \to Z$ is continuous, then TP and UT are perfectly weakly compact.*

(ii) *Operators with finite dimensional range are perfectly weakly compact.*

(iii) *Scalar multiples of perfectly weakly compact operators are perfectly weakly compact.*

(iv) *The sum of perfectly weakly compact operators need not be perfectly weakly compact.*

(v) *If $T\colon X \to Y$ is perfectly weakly compact and $P\colon W \to X$ is bounded, then TP need not be perfectly weakly compact.*

2.3 Lemma. (i) *Spaces isomorphic to weakly perfect, weakly mixed, or weakly imperfect spaces are weakly perfect, weakly mixed, or weakly imperfect, respectively.*

(ii) *Let $X = X_1 \oplus X_2$. If X_1 is weakly imperfect, so is X. If X is weakly perfect, so are X_1 and X_2. If X_1 is weakly mixed and X_2 is weakly perfect, X is weakly mixed. If X_1 and X_2 are weakly perfect, X is weakly perfect.*

(iii) *If a B-space X is a continuous linear image of a B-space Y and Y is weakly perfect, so is X.*

The following theorem follows from 2.1 and establishes several weakly imperfect spaces.

2.4 Theorem. *An imperfect space is weakly imperfect. A weakly perfect space is perfect.*

2.5 Theorem. *A reflexive B-space X is weakly perfect, hence perfect.*

Proof. Let Y be a B-space and $T: X \to Y$ be continuous. Then $T: (X, \Upsilon X') \to (Y, \Upsilon Y')$ is continuous. Since X is reflexive, S is weakly compact, whence $T(S)$ is weakly compact. Thus T is perfectly weakly compact.

3. Let X be a normed linear space. Recall that the *bounded X topology* on X' is the strongest topology which agrees with the weak star topology on every positive multiple of the unit sphere and has a local subbase at zero consisting of the neighborhoods $N(0; \{x_n\}; \varepsilon) = \{x' \in X' : |x'(x_n)| < \varepsilon \text{ for all } n\}$, where $\varepsilon > 0$ and $x_n \to 0$. We will denote the locally convex, Hausdorff topological linear space X' with the bounded X topology by (X', BX).

Now suppose X and Y are normed linear spaces. An operator $T: X' \to Y$ is *purely compact* iff $T: (X', BX) \to Y$ is continuous. An operator $T: X' \to Y$ is *purely weakly compact* iff $T: (X', BX) \to (Y, \Upsilon Y')$ is continuous. A purely [weakly] compact operator is immediately seen to be fully [weakly] compact.

The following two lemmas are readily established and show that the collection of purely [weakly] compact operators is not quite as pathological as the collection of perfectly or fully [weakly] compact operators.

3. 1 Lemma. *Let X and Y be normed linear spaces. Then the collection of purely compact (respectively, purely weakly compact) operators from X' to Y forms a uniformly closed subspace of the space of bounded operators from X' to Y.*

Proof. Let $T_n \to T$ with each $T_n: X' \to Y$ purely compact. Let S be the unit sphere of X'. Suffices to show that $(T|aS): (aS, \Upsilon X) \to Y$ is continuous for each positive scalar a. Let $a > 0$. Let $\varepsilon > 0$. There is an N such that $n \geqq N$ implies $|T - T_n| < \varepsilon/2a$. There is a weak star null neighborhood Q with $T_N(Q \cap aS) \subset S(0, \varepsilon/2) = \{y \in Y : |y| < \varepsilon/2\}$. Then if $x' \in Q \cap aS$,

$$\begin{aligned} |Tx| &\leqq |(T - T_N)x| + |T_N(x)| < |T - T_n|\,|x| + \varepsilon/2 \\ &< (\varepsilon/2a)\,a + \varepsilon/2 = \varepsilon, \text{ so } T(Q \cap aS) \subset S(0, \varepsilon/2). \end{aligned}$$

Hence T is purely compact.

The case where $T_n \to T$ and each $T_n: X' \to Y$ is purely weakly compact is similar.

3. 2 Lemma. *Let X, Y, Z, W be normed linear spaces. Let $T: Y' \to Z$ be purely (purely weakly) compact. Let $U: Z \to W$ and $V: Y \to X$ be continuous. Then TV', UT, and UTV' are purely (respectively, purely weakly) compact.*

Lemma 3. 1 would disprove the conjecture that each compact operator is the uniform limit of operators with finite dimensional range if each operator with finite dimensional range were purely compact. Unfortunately, the example in [5] of an operator with one-dimensional range which is not fully compact shows that this is not the case.

Lemma 3. 2 cannot in general be sharpened, as the following lemma shows.

3. 3 Lemma. *Let X, Y, and Z be Banach spaces. Then $T: X' \to Y$ purely compact and $U: Z' \to X'$ continuous need not imply TU purely compact.*

Proof. Let Z fail to be reflexive. Let S be the closed unit sphere of Z'. Then by [4] there is a $z'' \in Z''$ such that z'' fails to attain its supremum on S. If J is the canonical embedding of Z into Z'', z'' is clearly not in $J(Z)$. Choose $0 \neq x_0 \in X$, $x_0' \in X'$ such that $|x_0'| = 1$, $x_0'(x_0) = |x_0|$. Define $U: Z' \to X'$ by $U(z') = z''(z')\,x_0'$ $(z' \in Z')$. By the proof of [5, Theorem 19], U so defined is not a conjugate operator.

Choose $0 \neq y_0 \in Y$. Define $T: X' \to Y$ by $T(x') = x'(x_0)\,y_0$ $(x' \in X')$. Then T so defined is purely compact, yet TU is not even fully compact.

4. In this section we partially answer the question concerning the existence of mixed spaces. A few preliminary results will be necessary.

4. 1 Lemma. *Let (X, Υ) be a topological space. Let Y be a topological space under two topologies Υ_1 and Υ_2 with $\Upsilon_1 \leqq \Upsilon_2$. Let (Y, Υ_1) be Hausdorff. Then if $T\colon (X, \Upsilon) \to (Y, \Upsilon_1)$ is continuous whereas TX is Υ_2-conditionally compact, we have $T\colon (X, \Upsilon) \to (Y, \Upsilon_2)$ is continuous.*

Proof. Let A be the closure of TX in the Υ_2 topology. Then the identity map I: $(A, \Upsilon_2 \mid A) \to (A, \Upsilon_1 \mid A)$ is continuous, hence a homeomorphism, whence Υ_1 and Υ_2 coincide on A. Thus $T\colon (X, \Upsilon) \to (Y, \Upsilon_2)$ is continuous.

4. 2 Lemma. *Let X and Y be normed linear spaces. Let $T\colon X \to Y$ be compact (respectively, weakly compact). Then $T'\colon Y' \to X'$ is purely compact (respectively, purely weakly compact).*

Proof. Let $T\colon X \to Y$ be weakly compact. Then $T'\colon (Y', \Upsilon Y) \to (X', \Upsilon X'')$ is known to be continuous. Hence $T'\colon (Y', BY) \to (X', \Upsilon X'')$ is continuous, so T' is purely weakly compact.

Now suppose T is compact. Then T' is compact, and if S is the unit sphere of Y', $T'(S)$ is conditionally compact. Now $T'\colon (Y', \Upsilon Y) \to (X', \Upsilon X)$ is continuous, whence $T' \mid S\colon (S, \Upsilon Y \mid S) \to (X', \Upsilon X)$ is continuous. By 4. 1, $T' \mid S\colon (S, \Upsilon Y \mid S) \to X'$ is continuous. Hence $T'\colon (Y', BY) \to X'$ is continuous, as required.

4. 3 Lemma. *Let X and Y be normed linear spaces. Then all (weakly) compact $T\colon X' \to Y$ are purely (weakly) compact iff X is reflexive.*

Proof. If X is not reflexive, X' is not, so by [5] there is a one-dimensional map $T\colon X' \to Y$ that is not fully compact. This T is then neither purely compact nor purely weakly compact.

Suppose X is reflexive. Let $T\colon X' \to Y$ be continuous. Then $T\colon (X', \Upsilon X'') \to (Y, \Upsilon Y')$ is continuous. Since X is reflexive, X' is, whence $T\colon (X', \Upsilon X) \to (Y, \Upsilon Y')$ is continuous and T is purely weakly compact.

Now suppose X is reflexive and $T\colon X' \to Y$ is compact. Then $T\colon (X', \Upsilon X) \to (Y, \Upsilon Y')$ is continuous, whence by 4. 1 $(T \mid S)\colon (S, \Upsilon X \mid S) \to Y$ is continuous. Thus $T\colon (X', BX) \to Y$ is continuous and T is purely compact.

Recall that if $\{x_n\}$ is a sequence of elements of a B-space and $\{\varepsilon_n\}$ a sequence of real numbers, then $\{x_n\}$ is $\{\varepsilon_n\}$-independent iff $\Sigma \mid \varepsilon_n x_n \mid < \infty$ and for each bounded sequence $\{\alpha_n\}$ of scalars, $\Sigma\, \alpha_n \varepsilon_n x_n = 0$ implies $\alpha_n = 0$ for each $n = 1, 2, \ldots$ (cf. [2]).

4. 4 Theorem. *An irreflexive B-space with separable conjugate is imperfect.*

Proof. Let Y be an infinite-dimensional B-space. Pick a linearly independent sequence $\{y_n\}$ of vectors in Y with $\mid y_n \mid = 1$ for each n. Pick $\{\delta_n\}$ such that $\{y_n\}$ is $\{\delta_n\}$-linearly independent. Let $J'\colon X' \to X'''$ be the canonical embedding. Pick a linearly independent sequence $\{J'(x'_n)\}$ with $\mid x'_n \mid = 1$ for each n and $\{J'(x'_n)\}$ total over X''. Pick $\{\varepsilon_n\}$ such that $\{J'(x'_n)\}$ is $\{\varepsilon_n\}$-independent.

Constructing $T = \Sigma\, \varepsilon_n \delta_n x'_n(\cdot)\, y_n$ as in [2], T is compact. Then $T'''\colon X'' \to Y''$ is of the form $T'''(x'') = \Sigma\, \varepsilon_n \delta_n x''(x'_n)\, J_Y(y_n)$. Such T''' is $1-1$ since $\{J'x'_n\}$ is total, and is purely compact by 4. 2. $T''' X'' \subset J_Y Y$, so $J_Y^{-1} T'''$ is purely compact.

Now by Goldstine's theorem JS is weak star dense in S'' (where $J\colon X \to X''$, S is the closed unit sphere of X, S'' the closed unit sphere of X''); since X' is separable the weak star topology on S'' is metric, so there is $x' \in S'' \setminus JS$ and $\{x_n\} \subset S$ with $Jx_n \to x''$

(weak star). Then $J_Y^{-1} T''(J x_n) \to J_Y^{-1} T''(x'') \notin UX$, where $U = J_Y^{-1} T'' J\colon X \to Y$. Thus U is imperfectly compact, whence X is imperfect.

4.5 Theorem. *Let X be an irreflexive B-space, $M < X$ a closed subspace such that X/M is irreflexive with separable conjugate. Then X is imperfect.*

Proof. Let Y be an infinite-dimensional B-space and define $T\colon X/M \to Y$ as in 4.4. Define $U\colon X \to X/M$ by $U(x) = x + M$. Then U is continuous and linear, and $TU\colon X \to Y$ is imperfectly compact.

5. The remaining sections are concerned with the generalized conjugate of a compact operator. Let X be a normed linear space, Z a B-space. The B-space of all continuous operators $T\colon X \to Z$ will be denoted X^+ and termed the *generalized conjugate* of X. If X and Y are normed linear spaces and Z a B-space, each continuous linear map $A\colon X \to Y$ induces a continuous linear map $A^+\colon Y^+ \to X^+$ by $A^+(T) = T \circ A$ $(T \in Y^+)$. It is easily shown that A^+ so defined, called the *generalized conjugate* of A, satisfies $|A^+| = |A|$.

5.1 Lemma. *Let X and Y be normed linear spaces and let Z be an infinite-dimensional B-space. Then no non-zero $A\colon X \to Y$ has a compact generalized conjugate.*

Proof. Let $|A(x)| = 1$. Choose a sequence $\{z_i\}$ of vectors in Z such that $|z_i| \leqq 1$ for each $i \geqq 1$ and $\{z_i\}$ has no convergent subsequence.

Choose $y' \in Y'$ such that $y'(Ax) = 1$, $|y'| = 1$. For each $n \geqq 1$, define $T_n\colon Y \to Z$ by $T_n = y'(\cdot)\, z_n$. Then $|T_n| \leqq 1$ for each $n \geqq 1$, yet $A^+ T_n = T_n \circ A$ has no convergent subsequence. Thus A^+ is not compact.

Given a normed linear space X and a B-space Z, one may topologize X^+ in several ways. In the sequel we shall use only two of these, the weak operator topology and the Z'-operator topology, both of which produce a Hausdorff locally convex topological linear space. The weak operator topology has as a local subbase at 0 the collection of neighborhoods $N(0; z'; x; \varepsilon) = \{T \in X^+\colon |z'(Tx)| < \varepsilon\}$ as x ranges over X, z' over Z', and $\varepsilon > 0$. The Z' operator topology has as a local subbase at 0 the collection of $N(0; z'; \varepsilon) = \{T \in X^+\colon |z' T| < \varepsilon\}$ as z' ranges over Z' and $\varepsilon > 0$. These two topological linear spaces will be denoted by $(X^+, \Upsilon XZ')$ and $(X^+, \Upsilon Z')$ respectively.

If X is a normed linear space and W a topological linear space, an operator $T\colon X \to W$ will be called *totally bounded* iff T carries the closed unit sphere of X into a totally bounded set in W. The next two lemmas are readily established.

5.2 Lemma. *Let X be a normed linear space and W a topological linear space. The collection of totally bounded operators $T\colon X \to W$ forms a subspace of $[X, W]$ closed in the topology of uniform convergence on the closed unit ball in X.*

5.3 Lemma. *Let X and Y be normed linear spaces and let W_1 and W_2 be topological linear spaces. Suppose $T\colon X \to W_1$ is totally bounded while $U\colon Y \to X$ and $V\colon W_1 \to W_2$ are continuous. Then TU, VT and VTU are totally bounded.*

5.4 Lemma. *Let X be a B-space and let $\{x_i'\}_{i=1}^n < X'$. Then there is a $k \leqq n$ and $x_1, \ldots, x_k \in X$ such that $\{x_i\}_{i=1}^k$ is linearly independent and X is the topological direct sum of* sp $(x_1, \ldots, x_k)$ *and the intersection of the null manifolds of the x_i'.*

Proof. Let $\{x_{i_j}'\}_{j=1}^k$ be a maximal linearly independent subset of $\{x_i'\}_{i=1}^n$. Then $\bigcap_{j=1}^k \ker(x_{i_j}') = \bigcap_{i=1}^n \ker(x_i')$ and for each $1 \leqq j \leqq k$ we may and do pick $x_j \in \bigcap_{m \neq j} \ker(x_{i_m}')$ such that $x_{i_j}'(x_j) = 1$. Such a choice gives $\{x_j\}_{j=1}^k$ linearly independent. Defining $P\colon X \to \mathrm{sp}\,(x_1, \ldots, x_k)$ by $P(x) = \sum_{j=1}^k x_{i_j}'(x)\, x_j$ provides the required projection.

5. 5 Theorem. *Let X, Y, and Z be B-spaces, and let $A\colon X \to Y$ be given. Then A is compact iff $A^+\colon Y^+ \to (X^+, \Upsilon Z')$ is totally bounded.*

Proof. (i) Suppose A is compact. Then $A'\colon Y' \to X'$ is compact. Let $\varepsilon > 0$, $z_1', \ldots, z_n' \in Z'$ be given such that $|z_i'| \leqq 1$ for each i. Pick $z_1, \ldots, z_k$ of norm 1 by 5. 4. Let P be the projection onto sp $(z_1, \ldots, z_k)$ along $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(z_i')$. Let S be the closed unit sphere of Y^+, S' the closed unit sphere of Y'. For each $1 \leqq i \leqq k$, let P_i be the projection of sp $(z_1, \ldots, z_k)$ onto sp (z_i) along sp $(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_k)$. Let $M = \max_{1 \leqq i \leqq k} |P_i|$. There exist $y_1', \ldots, y_m' \in S'$ such that $A'(M \mid P \mid S') \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(A'y_i', \varepsilon/k)$ since A' is compact.

(ii) For each function f mapping $\{1, 2, \ldots, k\}$ into $\{1, 2, \ldots, m\}$, let $T_f\colon X \to Z$ be defined by $T_f(x) = \sum_{j=1}^{k} y'_{f(j)}(Ax)\, z_j$. Now if $y^+ \in S$, $Py^+ = \sum_{i=1}^{k} y'_{Py^+,i}(\cdot)\, z_i$. There is a function $g\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ such that $|A'y'_{Py^+,i} - A'y'_{g(i)}| < \varepsilon/k$ for each i among $1, 2, \ldots, k$. Let g be so given. Then if i is among $1, \ldots, n$ we have

$$\begin{aligned}
|z_i'(A^+y^+ - T_g)| &= |z_i'(Py^+A) + z_i'(I - P)\, y^+A - z_i'\, T_g| = |z_i'\, Py^+A - z_i'\, T_g| \\
&= \left| z_i'\left(\sum_{j=1}^{k} y'_{Py^+,j}\, A(\cdot)\, z_j - \sum_{j=1}^{k} y'_{g(j)}\, A(\cdot)\, z_j\right)\right| \\
&\leqq |z_i'| \left| \sum_{j=1}^{k} \left(y'_{Py^+,j}\, A(\cdot)\, z_j - y'_{g(j)}\, A(\cdot)\, z_j\right)\right| \\
&\leqq \sum_{j=1}^{k} |y'_{Py^+,j}\, A(\cdot) - y'_{g(j)}\, A(\cdot)| \\
&= \sum_{j=1}^{k} |A'y'_{Py^+,j} - A'y'_{g(j)}| < \sum_{j=1}^{k} \varepsilon/k = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Thus $A^+(S) \subset \bigcup_f N(T_f; z_1', \ldots, z_n'; \varepsilon)$, whence $A^+\colon Y^+ \to (X^+, \Upsilon Z')$ is totally bounded.

(iii) Conversely, suppose $A^+(S)$ is $\Upsilon Z'$-totally bounded. Suffices to show $A'(S')$ is totally bounded.

Pick $z \in Z$, $z' \in Z'$ such that $|z| = z'(z) = 1$, $Z = \text{sp}\,(z) \oplus \ker(z')$. If $y' \in Y'$, let $T_{y'} \in Y^+$ be that operator with $T_{y'}(y) = y'(y)\, z$ $(y \in Y)$. Let $\varepsilon > 0$. There are $T_1, \ldots, T_n \in S$ with $A^+(S) \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(A^+T_i; z'; \varepsilon)$. Let P be the projection of Z onto sp (z) along $\ker(z')$. For each $1 \leqq i \leqq n$, define $y_i' \in Y'$ by $y_i'(y)\, z = P\, T_i(y)$ $(y \in Y)$.

(iv) Let $y' \in S$. There is an i among $1, 2, \ldots, n$ such that $|z'A^+(T_{y'}) - z'A^+(T_i)| < \varepsilon$. Let i be so given. Then

$$\begin{aligned}
|A'y' - A'y_i'| &= |y'A - y_i'A| = |z'(z)\, y'A - z'(z)\, y_i'A| \\
&= \sup_{|x| \leqq 1} |y'(Ax)\, z'(z) - y_i'(Ax)\, z'(z)| = \sup_{|x| \leqq 1} |z'(y'Ax)\, z - z'(y_i'Ax)\, z| \\
&= \sup_{|x| \leqq 1} |z'(y'Ax)\, z - z'(PT_iAx)\, z| = \sup_{|x| \leqq 1} |z'A^+(y'(\cdot)\, z)(x) - z'A^+(PT_i)(x)| \\
&= |z'A^+(y'(\cdot)\, z) - z'A^+PT_i| = |z'A^+(y'(\cdot)\, z) - z'A^+PT_i - z'A^+(I - P)\, T_i| \\
&= |z'A^+(y'(\cdot)\, z) - z'A^+(T_i)| = |z'A^+(T_{y'}) - z'A^+(T_i)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Thus $A'(S') \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(A'y_i', \varepsilon)$, so $A'(S')$ is totally bounded.

6. This section is a consideration of the generalized conjugate of a compact operator in the event Z is assumed to be reflexive. Recall that a topological linear space is *quasi-complete* iff each bounded Cauchy net is convergent. It is easy to see that a B-space is weakly quasi-complete iff it is reflexive. The following lemma follows readily from the principle of uniform boundedness.

6. 1 Lemma. *If X and Z are B-spaces, a set $B \subset X^+$ is $\Upsilon Z'$-bounded if it is norm bounded.*

6. 2 Lemma. *Let X and Z be B-spaces with Z reflexive. Then $(X^+, \Upsilon Z')$ is quasi-complete.*

Proof. Suffices by 6. 1 to show that the unit sphere, S, of X^+ is $\Upsilon Z'$-complete. Let $\{T_a\}_{a \in A} \subset S$ be a $\Upsilon Z'$-Cauchy net. Then $\{T_a x\}_{a \in A}$ is a bounded weak Cauchy net in Z for each $x \in X$, which converges to a unique limit $\hat{x} \in Z$ since Z is reflexive.

Define $T\colon X \to Z$ by $T(x) = \hat{x}$ $(x \in X)$. Such T is clearly linear and well-defined. In order to show that T is continuous, it suffices to show that $z'T$ is continuous for each $z' \in Z'$. In fact, if $z' \in Z'$, $\varepsilon > 0$, and $\{x_n\} \to 0$, there is an $a \in A$ such that $b, c \geqq a$ implies $|z'T_b - z'T_c| < \varepsilon/3$. The corresponding T_a is continuous, so there is an N such that $n \geqq N$ implies $|x_n| \leqq 1$, $|z'T_a x_n| < \varepsilon/3$. Let $n \geqq N$. Since $T_\alpha x_n \to Tx_n$ weakly, there is an $a_n \geqq a$ such that $\alpha \geqq a_n$ implies $|z'T_\alpha x_n - z'Tx_n| < \varepsilon/3$. Then

$$|z'Tx_n| \leqq |z'Tx_n - z'T_{a_n}x_n| + |z'T_{a_n}x_n - z'T_a x_n| + |z'T_a x_n| < \varepsilon/3 + \frac{\varepsilon|x_n|}{3} + \varepsilon/3 \leqq \varepsilon.$$

Hence $z'T$ is continuous.

Now $\{T_\alpha\} \to T(\Upsilon Z')$, for if $z' \in Z'$, $z'T_\alpha x \to z'Tx$ $(x \in X)$, i. e. $\{z'T_\alpha\} \to z'T$ in the weak star topology on X'. But $\{z'T_\alpha\}$ is Cauchy and X' is complete, so $z'T_\alpha \to \hat{z}' \in X'$ for each $z' \in Z'$. Then certainly $z'T_\alpha \to \hat{z}'$ (weak star). The weak star topology on X' is Hausdorff, so $\hat{z}' = z'T(z' \in Z')$. Thus $T_\alpha \to T(\Upsilon Z')$.

Need $T \in S$. But

$$\begin{aligned} |T| &= \sup_{|x| \leq 1} |Tx| = \sup_{|x| \leq 1} \sup_{|z'| \leq 1} |z'Tx| = \sup_{|z'| \leq 1} \sup_{|x| \leq 1} |z'Tx| \\ &= \sup_{|z'| \leq 1} |z'T| = \sup_{|z'| \leq 1} \lim_{\alpha} |z'T_\alpha| \leqq \sup_{|z'| \leq 1} |z'| = 1. \end{aligned}$$

Thus S is $(\Upsilon Z')$-complete.

Let X be a normed linear space and W a topological linear space. A map $T\colon X \to W$ is *compact* iff $T(S)$ is conditionally compact. In the light of this definition, 6. 2 and 5. 5 combine to give a slightly more satisfactory result.

6. 3 Corollary. *Let X, Y, and Z be B-spaces with Z reflexive. Then a map $A\colon X \to Y$ is compact iff $A^+\colon Y^+ \to (X^+, \Upsilon Z')$ is compact.*

In the event $\dim(Z) < \infty$, this result takes a much simpler form.

6. 4 Corollary. *Let X, Y, and Z be B-spaces with Z finite-dimensional. Then a map $A\colon X \to Y$ is compact iff $A^+\colon Y^+ \to X^+$ is compact.*

Proof. If Z is finite-dimensional, the Z'-operator topology on X^+ coincides with the norm topology.

The following useful lemma appears as [1, VI. 9. 6].

6. 5 Lemma. *Let X and Z be B-spaces. Let S be the closed unit sphere of $[X, Z]$. Then S is compact in the weak operator topology iff Z is reflexive.*

We are now able to prove the following interesting analogue of full compactness.

6. 6 Theorem. *Let X, Y, and Z be B-spaces with Z reflexive. Let S be the closed unit sphere of $[Y, Z]$. Then a map $A: X \to Y$ is compact iff $A^+(S)$ is $\Upsilon Z'$-compact.*

Proof. Apply 4. 1 to obtain the continuity of $A^+ \mid S: (S, \Upsilon YZ') \to (X^+, \Upsilon Z')$. By 6. 5, $(S, \Upsilon YZ')$ is compact, whence $(A^+(S), \Upsilon Z')$ is compact.

Bibliography

[1] *Dunford, Nelson*, and *T. Jacob Schwartz*, Linear Operators Part I, New York and London 1958.

[2] *Goldberg, Seymour*, and *A. H. Kruse*, The Existence of Compact Linear Maps between Banach Spaces, Proceedings American Mathematical Society **13** (1962), 808—811.

[3] *S. Goldberg* and *E. Thorp*, The Range as Range Space for Compact Operators, This Journal **211** (1962), 113—115.

[4] *R. C. James*, Weakly Compact Sets. Notices Amer. Math. Soc., Abstract 63T—208, (June 1963), 368.

[5] *Edward O. Thorp*, The Range as Range Space for Compact Operators. II (to appear in this Journal).

Eingegangen 11. Mai 1964

Fatou-Rieszsche Sätze in der Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen

Von *Richard Warlimont* in Syracuse, N. Y.

1. Einleitung

Die starke Rieszsche Summierbarkeit unendlicher Reihen ist folgendermaßen definiert (vgl [2], p. 123):

Seien $k, p \geqq 1$ reelle Zahlen, wobei $kp + 1 > 0$ ist, und sei (μ_n) eine reelle, nicht negative, streng monoton gegen ∞ strebende Folge.

Dann heißt die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a_n komplexwertig) stark summierbar im Rieszschen Sinne mit der Ordnung k, dem Typus μ und dem Index p (kurz: summierbar $| R, \mu, k |^p$) zur Summe a, wenn für die gewöhnlichen Rieszschen Summen

$$A_\mu^k(\omega) = \sum_{\mu_n < \omega} a_n (\omega - \mu_n)^k$$

die Beziehung

$$\int_0^x | A_\mu^k(\omega) - a\omega^k |^p \, d\omega = o(x^{kp+1}) \text{ für } x \to \infty$$

gilt.

Entsprechend nennt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ beschränkt im Sinne $| R, \mu, k |^p$, falls

$$\int_0^x | A_\mu^k(\omega) |^p \, d\omega = O(x^{kp+1}) \text{ für } x \to \infty$$

gilt.

Man schreibt dafür kurz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \mid R, \mu, k \mid^p \text{ beziehungsweise } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = O(1) \mid R, \mu, k \mid^p.$$

Zu einer Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ gibt es stets eine Abszisse

$$c = c(k, p) \qquad (-\infty \leqq c \leqq \infty)$$

derart, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = f(s) \mid R, \lambda, k \mid^p \text{ für } \operatorname{Re} s > c$$

ist, während für $\operatorname{Re} s < c$ nirgends Summierbarkeit im Sinne $| R, \lambda, k |^p$ besteht; $f(s)$ ist eine in $\operatorname{Re} s > c$ holomorphe Funktion, die für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Max}(c, 0)$ durch folgendes un-

eigentliche, absolut konvergente Integral dargestellt wird:

$$f(s) = \frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty A_\lambda^k(u)\, e^{-su} du;$$

und die Abszisse $c(k, p)$, falls sie nichtnegativ ist, ist gegeben durch

$$c(k, p) = \inf\left(c \,\middle|\, \int_0^x |A_\lambda^k(u)|^p\, du = O(e^{cpx})\right)$$

(vgl. dies für den Fall der gewöhnlichen Dirichletreihen, d. h. $\lambda_n = \log n$, mit [5], S. 29 und für den allgemeinen Fall mit [4]).

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit[1]) gilt dem Studium der Summierbarkeit im Sinne $|R, \lambda, k|^p$ einer Dirichletreihe auf der Abszisse $c(k, p)$.

Als Übertragung der Ergebnisse von M. Riesz über typische Mittel (R, λ, k) (vgl. [5] oder [1] p. 69ff.) auf die starke Summierbarkeit $|R, \lambda, k|^p$ beweisen wir nämlich (vgl. [1], p. 74, theorem 3. 62):

Satz 1. *Sei* $kp + 1 > 0$, $c \geqq 0$ *und*

$$\int_0^x |A_\lambda^k(\omega)\, e^{-c\omega}|^p d\omega = o(x^{kp+1}) \text{ beziehungsweise } O(x^{kp+1}).$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n s} = f(s) = \frac{s^{k+1}}{\Gamma(k+1)} A_\lambda^k(u)\, e^{-su} dn \mid R, \lambda, k|^p$$

für Re $s > c$.

Ist die für Re $s > c$ *holomorphe Funktion* $f(s)$ *auch noch holomorph in* $s_0 = c + it_0$, *so gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n s_0} = \begin{cases} f(s_0) \mid R, \lambda, k|^p & \text{im Falle } o \\ O(1) \mid R, \lambda, k|^p & \text{im Falle } O, \end{cases}$$

1) *für* $k = [k]$ *und* $c \geqq 0$,

2) *für beliebiges* k *mit* $kp + 1 > 0$ *aber* $c > 0$,

und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten, abgeschlossenen Intervall der Holomorphie $t_1 \leqq t_0 \leqq t_2$, *welches* 0 *nicht enthält.*

Die Voraussetzung der Holomorphie läßt sich nun wesentlich abschwächen; es gilt nämlich (vgl. [1], p. 75ff):

Satz 2. *Sei* $f(s)$ *beschränkt in einem Gebiet* G *der Halbebene* Re $s > c$, *zu dessen Rand ein* 0 *nicht enthaltendes Intervall der Abszisse* c *gehöre, derart, daß für alle* $t_1 < t_0 < t_2$ *desselben bei horizontaler Annäherung der Grenzwert* $\lim_{\sigma \to c+0} f(\sigma + it_0)$, *bezeichnet mit* $f(c + it_0) = f(s_0)$, *existiert.*

Dann gilt die Behauptung des Satzes 1

1. *im Falle* $k = 0$ *an allen Stellen* t_0, *wo* $f(c + it_0)$ *durch seine Fourierreihe dargestellt wird,*

2. *im Falle* $k > 0$ *fast überall in* $t_1 < t_0 < t_2$.

---

[1]) Satz 1 und 2 für ganzes k sowie Anwendungsbeispiele in der Zahlentheorie finden sich bereits in der Dissertation des Verfassers, Göttingen 1961.

Übrigens erweist sich — wenigstens für ganze $k \geqq 0$ — im Falle $c > 0$ die Bedingung $\int_0^x |A_\lambda^k(\omega)\, e^{-c\omega}|^p d\omega = o(x^{kp+1})$ beziehungsweise $O(x^{kp+1})$ auch als notwendig für die Summierbarkeit beziehungsweise Beschränktheit von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ im Sinne $|R, \lambda, k|^p$ für ein $s_0 = c + it_0$ (vgl. [4] oder die Dissertation des Verfassers, Göttingen 1961).

Im zweiten Teil der Arbeit beweisen wir für die Summierbarkeit im Sinne $|R, l, k|^p$ Dirichletscher Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n^{-s}$ analog zu Satz 1 (vgl. [1], p. 78, theorem 3. 65):

Satz 3. *Sei $k \geqq 0$, $c \geqq 0$, $p \geqq 1$, $s_0 = c + it$ und*

$$\int_1^x |A_l^k(u)|^p du = o(x^{(k+c)p+1}) \text{ beziehungsweise } O(x^{(k+c)p+1}).$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n^{-s} = f(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{\Gamma(s)\,\Gamma(k+1)} \int_1^{\infty} A_l^k(u)\, u^{-s-k-1} du \mid R, l, k|^p$$

für Re $s > c$.

Ist die für Re $s > c$ *holomorphe Funktion $f(s)$ auch noch holomorph in $s_0 = c + it_0$, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n^{-s_0} = \begin{cases} f(s_0) \mid R, l, k|^p & \text{im Falle } o \\ O(1) \mid R, l, k|^p & \text{im Falle } O \end{cases}$$

und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $t_1 \leqq t_0 \leqq t_2$ der Holomorphie, das 0 *nicht enthält.*

Bezeichnungen. Für $p > 1$ bedeutet q die zu p konjugierte Zahl: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

„integrierbar" bedeutet stets „integrierbar im Lebeguesschen Sinne". $[k]$ ist die größte ganze Zahl $\leqq k$.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird häufig an Stelle des O-Symboles das $\ll$-Symbol verwendet.

o und O beziehen sich stets auf die Bewegung einer Variablen $x, \omega, \ldots$ gegen ∞.

$Q(\ldots)$ ist als Abkürzung von „o beziehungsweise $O(\ldots)$" zu verstehen.

Vorbemerkung. Die Beweise sind durchweg nur für $p > 1$ geführt; es wird immer wieder die Höldersche Ungleichung benutzt werden, worauf nicht stets von neuem hingewiesen wird.

Grundlegend für das folgende ist ein Analogon zum Maximumprinzip holomorpher Funktionen, nämlich

Hilfssatz 1. *Sei die Funktion $\varphi(s, \omega)$ der komplexen Veränderlichen s und der reellen Veränderlichen ω bezüglich s in dem beschränkten und abgeschlossenen Gebiet G stetig, im Inneren von G holomorph, und sei $|\varphi(s, \omega)|^p$ bezüglich ω in $0 \leqq \omega \leqq x$ integrierbar. Dann wird $\operatorname{Max}_{s \in G} \int_0^x |\varphi(s, \omega)|^p d\omega$ auf dem Rande von G angenommen.*

Beweis. $\int_0^x |\varphi(s, \omega)|^p d\omega$ ist eine subharmonische Funktion (vgl. [3], p. 159, insbesondere theorem 206).

1. Teil: Typus λ_n

Sei $0 \leqq \lambda_1 < \cdots < \lambda_n \uparrow \infty$ und

$$A_k(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n(\omega - \lambda_n)^k \text{ für } k > -1 \text{ und } A_k(\omega, s) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n e^{-\lambda_n s}(\omega - \lambda_n)^k.$$

Dann gilt (vgl. [1], p. 53, Lemma 3. 31)

$$(1.1) \quad A_k(\omega, s) = e^{-\omega s} A_k(\omega) + \sum_{r=1}^{k+1} s^r \binom{k+1}{r} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\omega A_k(u)\, e^{-su}(\omega - u)^{r-1} du$$

für $k = [k]$,

$$(1.2) \quad A_k(\omega, s) = e^{-\omega s} A_k(\omega)$$
$$+ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(H+1)\,\Gamma(k-H+2)} \int_0^\omega A_H(u)\,(e^{-su} - e^{-s\omega})\,(\omega - u)^{k-H-1} du$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(H+1)} \sum_{r=1}^{H+1} s^r \binom{H+1}{r} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-H+r)} \int_0^\omega A_H(u)\, e^{-su}(\omega - u)^{k-H-1-r} du$$

für $k \neq [k] \geqq 0$, $H = [k] + 1$ und

$$(1.3) \quad A_k(\omega, s) = e^{-\omega s} A_k(\omega) - k \int_0^\omega A_0(u)\,(e^{-su} - e^{-s\omega})\,(\omega - u)^{k-1} du$$
$$+ s \int_0^\omega A_0(u)\, e^{-su}(\omega - u)^k du$$

für $-1 < k < 0$.

Wir beginnen mit einer Reihe vorbereitender Hilfssätze Fatou-Rieszschen Charakters über die starke Summierung von Laplaceintegralen.

Hilfssatz 2. *Sei $K > 0$, $b(u)$ beschränkt und integrierbar in $0 \leqq u < \infty$ und*

$$\int_0^\omega |\, b(u)\,|^p du = Q(\omega^K).$$

Dann ist $F(s) = \int_0^\infty b(u)\, e^{-su} du$ holomorph für $\operatorname{Re} s > 0$.

Sei $F(s)$ auch noch holomorph in it_0 und sei

$$H(s, \omega) = e^{-s\omega} \left(\frac{d}{ds}\right)^r [F(s)\, e^{s\omega}] - \int_0^\omega b(u)\, e^{-su}(\omega - u)^r du$$

mit einem ganzen $r \geqq 0$.

Dann ist

$$\int_0^x |\, H(it_0, \omega)\,|^p d\omega = Q(x^K)$$

und sogar gleichmäßig in jedem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $t_1 \leqq t_0 \leqq t_2$ der Holomorphie (vgl. [1], p. 69, lemma 3. 61).

Beweis. Aus $\left| \int_0^\omega b(u)\, du \right| \leqq \left(\int_0^\omega |\, b(u)\,|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{q}} = O\left(\omega^{\frac{K}{p} + \frac{1}{q}}\right)$ folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz und somit auch die Holomorphie von $F(s)$ für $\operatorname{Re} s > 0$.

Es werde nun $\int_0^x |e^{s\omega} H(s,\omega)|^p d\omega$ im Holomorphiegebiet abgeschätzt.

1) Re $s > 0$. Hier ist

$$H(s,\omega) = \int_\omega^\infty b(u)\, e^{-su} (\omega - u)^r du,$$

$$|H(s,\omega)|^p \leqq \int_\omega^\infty |b(u)|^p e^{-\sigma u} du \left(\int_\omega^\infty (\omega - u)^{rq} e^{-\sigma u} du\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\ll \sigma^{-rp-\frac{p}{q}} e^{-\sigma\omega \frac{p}{q}} \int_\omega^\infty |b(u)|^p e^{-\sigma u} du,$$

$$\int_0^x |e^{s\omega} H(s,\omega)|^p d\omega \ll \sigma^{-rp-\frac{p}{q}} \int_0^x e^{\sigma\omega} d\omega \int_\omega^\infty |b(u)|^p e^{-\sigma u} du$$

$$\ll \sigma^{-(r+1)p} \left\{\int_0^x |b(u)|^p du + e^{\sigma x} \int_x^\infty |b(u)|^p e^{-\sigma u} du\right\}.$$

$$\int_x^\infty |b(u)|^p e^{-\sigma u} du = -e^{-\sigma x} \int_0^x |b(v)|^p dv + \sigma \int_x^\infty e^{-\sigma u} du \int_0^u |b(v)|^p dv$$

$$= e^{-\sigma x} Q(x^K) + \sigma Q\left(\int_x^\infty e^{-\sigma u} u^K du\right).$$

$$\int_x^\infty e^{-\sigma u} u^K du = \int_0^\infty (x+u)^K e^{-\sigma(x+u)} du \ll e^{-\sigma x} \left\{\int_0^\infty (x^K + u^K)\, e^{-\sigma u} du\right\}$$

$$\ll e^{-x} (\sigma^{-1} x^K + \sigma^{-K-1}).$$

Dies ergibt zusammen

$$\int_0^x |e^{s\omega} H(s,\omega)|^p d\omega \ll \sigma^{-(r+1)p} \big(Q(x^K) + \sigma^{-K}\big) \ll \sigma^{-(r+1)p-K} Q(x^K).$$

2) Re $s < 0$. Hier ist

$$\int_0^x \left|\left(\frac{d}{ds}\right)^r [(F(s)\, e^{\omega s})]\right|^p d\omega \ll \int_0^x \omega^{rp} e^{-|\sigma|\,\omega p} d\omega \ll |\sigma|^{-rp-1},$$

$$\left|\int_0^\omega b(u)\, e^{s(\omega-u)} (\omega - u)^r du\right|^p \leqq \int_0^\omega |b(u)|^p e^{\sigma(\omega-u)} du \left(\int_0^\omega e^{\sigma(\omega-u)} (\omega - u)^{rq} du\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\ll |\sigma|^{-rp-\frac{p}{q}} e^{\sigma\omega} \int_0^\omega |b(u)|^p e^{-\sigma u} du,$$

$$\int_0^x e^{\sigma\omega} d\omega \int_0^\omega |b(u)^p e^{-\sigma u} du \leqq \int_0^x |b(u)|^p e^{-\sigma u} du \int_u^\infty e^{\sigma\omega} d\omega = |\sigma|^{-1} Q(x^K).$$

Dies ergibt

$$\int_0^x |e^{s\omega} H(s,\omega)|^p d\omega \ll |\sigma|^{-rp-1} + |\sigma|^{-(r+1)p} Q(x^K) = |\sigma|^{-(r+1)p} Q(x^K).$$

Somit gilt im Holomorphiegebiet von $F(s)$ für $\sigma \neq 0$:

$$\int_0^x |e^{s\omega} H(s,\omega)|^p d\omega = |\sigma|^{-(r+1)p-K} Q(x^K).$$

Nun werde das Intervall $[it_1, it_2]$ in ein im Holomorphiegebiet enthaltenes Rechteck R mit achsenparallelen Seiten eingeschlossen; dabei seien iT_1 und iT_2 dessen Schnitt-

punkte mit der t-Achse, also $T_1 < t_1 < t_2 < T_2$. Dann ist $|s - iT_1|\ |s - iT_2| \ll |\sigma|$ gleichmäßig für alle Randpunkte $s \in R$.

Setzen wir

$$\varphi(s, \omega) = (s - iT_1)^\alpha (s - iT_2)^\alpha e^{s\omega} H(s, \omega) \text{ mit } \alpha = r + 1 + \frac{K}{p},$$

so sind für $\varphi(s, \omega)$ und R die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt. Auf dem Rande von R gilt, abgesehen von $\operatorname{Re} s = 0$, die gleichmäßige Abschätzung

$$\int_0^x |\varphi(s, \omega)|^p d\omega \ll |\sigma|^{(r+1)p+K} \int_0^x |e^{s\omega} H(s, \omega)|^p d\omega = Q(x^K),$$

die sich aus Stetigkeitsgründen nunmehr auch auf $\operatorname{Re} s = 0$ ausdehnen läßt und somit nach Hilfssatz 1 auf ganz R, insbesondere also auf $[it_1, it_2]$ gilt; dann ist aber

$$\int_0^x |H(it_0, \omega)|^p d\omega \leqq (|T_1 - t_1|\ |T_2 - t_2|)^{-\alpha p} \int_0^x |\varphi(s, \omega)|^p d\omega = Q(x^K)$$

gleichmäßig für $t_1 \leqq t_0 \leqq t_2$.

Hilfssatz 3. *Es gelten die Voraussetzungen wie in Hilfssatz 2 mit $K = kp + 1$, $k \geqq 0$. Dann gilt*

$$\text{(a)} \int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, e^{-it_0 u} (\omega - u)^k du - \omega^k F(it_0) \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}),$$

$$\text{(b)} \int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, e^{-it_0 u} (\omega - u)^r du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}) \quad (r = 0, \ldots, k-1) \text{ für } k = [k] > 0,$$

$$\int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, e^{-it_0 u} (\omega - u)^{k-r} du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}) \quad (r = 1, \ldots, [k]+1) \text{ für } k \neq [k],$$

$$\text{(c)} \int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, (e^{-it_0 u} - e^{-it_0 \omega})\, (\omega - u)^{k-[k]-2} du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}), \text{ für } k \neq [k],$$

und zwar wieder gleichmäßig in jedem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $t_1 \leqq t_0 \leqq t_2$ der Holomorphie (vgl. [1], p. 72, theorem 3. 61).

Beweis. Für $k = [k]$ folgen (a) und (b) unmittelbar aus Hilfssatz 2. Sei also weiterhin $k \neq [k]$. Mit $H = [k] + 1$, $s_0 = it_0$ und

$$B_j(y) = \int_0^y b(u)\, e^{-s_0 u} (y - u)^j du, \qquad j \geqq 0$$

ist dann

$$(1.4) \qquad B_k(y) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k - [k])\, \Gamma(H)} \int_0^y B_{[k]}(u)\, (y - u)^{k-H} du$$

$$(1.5) \qquad B_H(y) = H \int_0^y B_{[k]}(u)\, du.$$

Zu (a): In unserer Schreibweise ist

$$\int_0^x |B_k(\omega) - \omega^k F(s_0)|^p d\omega = Q(x^{kp+1})$$

zu zeigen.

Nun liefert Hilfssatz 2 für $r = H$ beziehungsweise $r < H$

$$\int_0^x |B_H(\omega) - \omega^H F(s_0)|^p d\omega = Q(x^{kp+1}) \tag{1.6}$$

beziehungsweise

$$\int_0^x |B_r(\omega) - \omega^r F(s_0)|^p d\omega = Q(x^{kp+1}), \tag{1.7}$$

also

$$\int_0^x |B_r(\omega)|^p d\omega = Q(x^{kp+1}). \tag{1.8}$$

Sei $x \geqq 2$. Nach (1.4) ist

$$\int_0^x |B_k(\omega) - \omega^k F(s_0)|^p d\omega \ll \int_0^x \left| \int_0^\omega (B_{[k]}(u) - u^{[k]} F(s_0))\,(\omega - u)^{k-H} du \right|^p d\omega$$

$$\ll 1 + \int_1^x \left| \left(\int_0^{\omega-1} + \int_{\omega-1}^\omega \right) (B_{[k]}(u) - u^{[k]} F(s_0))\,(\omega - u)^{k-H} du \right|^p d\omega = 1 = X + Y.$$

Nach (1.5) ist

$$\int_0^{\omega-1} (B_{[k]}(u) - u^{[k]} F(s_0))\,(\omega - u)^{k-H} du$$

$$= (B_H(\omega - 1) - (\omega - 1)^H F(s_0)) + (k - H - 1) \int_0^{\omega-1} (B_H(u) - u^H F(s_0))\,(\omega - u)^{k-H-1} du$$

und somit nach (1.6)

$$X \ll Q(x^{kp+1}) + \int_1^x \left| \int_0^{\omega-1} (B_H(u) - u^H F(s_0))\,(\omega - u)^{k-H-1} du \right|^p d\omega$$

$$\ll Q(x^{kp+1}) + \int_1^x \int_0^{\omega-1} |B_H(u) - u^H F(s_0)|^p (\omega - u)^{k-H-1} du\, d\omega$$

$$\ll Q(x^{kp+1}) + \int_0^{x-1} |B_H(u) - u^H F(s_0)|^p du \int_{u+1}^\infty (\omega - u)^{k-H-1} d\omega = Q(x^{kp+1}).$$

$$Y \ll \int_1^x \int_{\omega-1}^\omega |B_{[k]}(u) - u^{[k]} F(s_0)|^p (\omega - u)^{k-H} du\, d\omega$$

$$\ll 1 + \int_1^x |B_{[k]}(u) - u^{[k]} F(s_0)|^p du \int_u^{u+1} (\omega - u)^{k-H} d\omega$$

$$+ \int_{x-1}^x |B_{[k]}(u) - u^{[k]} F(s_0)|^p du \int_u^x (\omega - u)^{k-H} d\omega = Q(x^{kp+1})$$

nach (1.7).

Der Beweis von (b) verläuft ähnlich unter Benutzung von (1.8). (c) ist elementar, d. h. (c) folgt allein aus der Annahme über $b(u)$: Man spalte $\int_0^\omega$ auf in $\int_0^{\omega-1}$ und $\int_{\omega-1}^\omega$, schätze unter dem ersten Integral $(e^{-s_0 u} - e^{-s_0 \omega})$ ab durch $O(1)$ und unter dem zweiten durch $O(\omega - u)$.

Hilfssatz 4. *Es gelten die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 mit*

$$K = kp + 1, \quad -\frac{1}{p} < k < 0.$$

Dann gilt

$$\text{(a)} \quad \int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, e^{-s_0 u} (\omega - u)^k du - \omega^k F(s_0) \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}),$$

$$\text{(b)} \quad \int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, (e^{-s_0 u} - e^{-s_0 \omega})\, (\omega - u)^{k-1} du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}).$$

Beweis. Für $x \geqq 2$ ist

$$\int_0^x \left| \int_0^\omega b(u)\, e^{-s_0 u} (\omega - u)^k du - \omega^k F(s_0) \right|^p d\omega$$

$$\ll 1 + \int_1^x \left| \left(\int_0^{\omega-1} + \int_{\omega-1}^{\omega} \right) b(u)\, e^{-s_0 u} (\omega - u)^k du - \omega^k F(s_0) \right|^p d\omega = 1 + X + Y.$$

$$\int_0^{\omega-1} b(u)\, e^{-s_0 u} (\omega - u)^k du - \omega^k F(s_0) = B_0(\omega - 1) - F(s_0) + k \int_0^{\omega-1} (B_0(u) - F(s_0))(\omega - u)^{k-1}.$$

Nach (1. 6), mit $H = 0$, folgt dann $X = Q(x^{pk+1})$; ferner gilt

$$Y \ll \int_1^x d\omega \int_{\omega-1}^{\omega} |\, b(u)\, |^p (\omega - u)^k du = Q(x^{kp+1}).$$

(b) ist wieder trivial.

Hilfssatz 5. *Sei* $kp + 1 > 0$, $k \neq [k]$, $H = [k] + 1$, $c > 0$. *Dann gilt*

$$\int_0^x |\, A_H(\omega)\, e^{-c\omega} \,|^p d\omega \ll \int_0^x |\, A_k(\omega)\, e^{-c\omega} \,|^p d\omega.$$

Beweis. Sei $0 < \delta < c$. Dann ist (vgl. [1], p. 3, (1. 21))

$$\int_0^x |\, A_H(\omega)\, e^{-c\omega} \,|^p d\omega \ll \int_0^x e^{-c\omega p} d\omega \left| \int_0^\omega A_k(u)\, (\omega - u)^{H-k-1} du \right|^p$$

$$= \int_0^x e^{-c\omega p} d\omega \left| \int_0^\omega A_k(u)\, e^{-\delta u} e^{\delta u} (\omega - u)^{H-k-1} du \right|^p$$

$$\leqq \int_0^x e^{-c\omega p} d\omega \int_0^\omega |\, A_k(u)\, |^p e^{-\delta p u} (\omega - u)^{H-k-1} du \left(\int_0^\omega e^{\delta u q} (\omega - u)^{H-k-1} du \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\ll \int_0^x e^{(\delta - c)\omega p} d\omega \int_0^\omega |\, A_k(u)\, |^p e^{-\delta p u} (\omega - u)^{H-k-1} du$$

$$= \int_0^x |\, A_k(u)\, |^p e^{-\delta p u} du \int_u^x e^{(\delta - c) p \omega} (\omega - u)^{H-k-1} du$$

$$\ll \int_0^x |\, A_k(u)\, |^p e^{-\delta p u} e^{(\delta - c) p u} du.$$

Beweis von Satz 1. Den trivialen Fall $s_0 = 0$ nehmen wir vorweg.

Für $Q = O$ stimmen dann nämlich Voraussetzung und Behauptung überein. Im Falle $Q = o$ lautet die Annahme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \mid R, \lambda, k \mid^p.$$

Dann gilt aber wegen des Abelschen Prinzips

$$\lim_{s \to 0} f(s) = 0 \text{ in jedem Winkelraum } |\operatorname{arc} s| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2};$$

wegen der in 0 vorausgesetzten Holomorphie ist daher $f(0) = 0$, und somit sind abermals Voraussetzung und Behauptung identisch. Sei nun also $s_0 \neq 0$.

Im Falle $k = [k]$ setzen wir $b(u) = A_k(u)\, e^{-cu}$, $F(s) = \dfrac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} f(s)$ und wenden die Annahme über $A_k(u)$ auf den ersten Term, Hilfssatz 3 (b) auf die ersten k Terme der Summe, Hilfssatz 3 (a) auf den letzten Term der Summe des auf der rechten Seite von Formel (1. 1) stehenden Ausdruckes an.

Im Falle $k \neq [k] \geqq 0$ setzen wir $b(u) = A_H(u)\, e^{-cu}$, $F(s) = \dfrac{\Gamma(H+1)}{H+1} f(s)$ und wenden die Annahme über $A_k(u)$ auf den ersten Term unter Hinzunahme von Hilfssatz 5, den Hilfssatz 3 (c) auf den zweiten Term, Hilfssatz 3 (b) auf die ersten H Terme der Summe, Hilfssatz 3 (a) auf den letzten Term des auf der rechten Seite von Formel (1. 2) stehenden Ausdrucks an.

Im Falle $-\dfrac{1}{p} < k < 0$ werden entsprechend auf (1. 3) die Hilfssätze 4 und 5 angewandt.

Zum Beweise von Satz 2 benötigen wir eine Verallgemeinerung von Hilfssatz 3.

Hilfssatz 6. *An Stelle der im Hilfssatz 3 voraugesetzten Holomorphie auf einem Intervall der t-Achse werde für $F(s)$ folgendes vorausgesetzt: Sei $F(s)$ beschränkt in einem Gebiet G der Halbebene* Re $s > 0$, *dessen Rand ein Intervall (t_1, t_2) der t-Achse enthalte derart, daß für alle $t_1 < t_0 < t_2$ bei horizontaler Annäherung der Grenzwert $\lim\limits_{\sigma \to +0} F(s + it_0)$, bezeichnet mit $F(it_0)$, existiert. Dann gelten die Beziehungen* (a) *und* (b) *aus Hilfssatz 3*

1) *für $k = 0$ an allen Stellen t_0, wo $F(it_0)$ durch seine Fourierreihe dargestellt wird,*

2) *für $k > 0$ fast überall in (t_1, t_2)*

(vgl. [1], p. 75, theorem 3. 63).

Beweis. Sei $s \in G$. Dann ist (vgl. [1], p. 75)

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{it_1}^{it_2} \frac{F(z)}{z - s}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{F(z)}{z - s}\, dz = F_1(s) + F_2(s),$$

wobei C einen in G verlaufenden, in it_1 und it_2 einmündenden und zusammen mit dem Intervall (it_1, it_2) den Punkt s umschließenden Weg bezeichne. Es ist

$$F_1(s) = \int\limits_0^\infty \varphi(u)\, e^{-su}\, du \quad \text{mit} \quad \varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t_1}^{t_2} F(it)\, e^{iut}\, dt = o(1)$$

nach dem Riemann-Lebesguesschen Lemma.

Das mit $B(u) = b(u) - \varphi(u)$ gebildete, für Re $s > 0$ konvergente Laplaceintegral

$$F_2(s) = \int\limits_0^\infty B(u)\, e^{-su}\, du$$

erfüllt demnach die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 mit dem Holomorphieintervall (it_1, it_2), und daher gilt für alle $t_1 < t_0 < t_2$

$$\text{(a')} \quad \int\limits_0^x \left| \int\limits_0^\omega B(u)\, e^{-it_0 u} (\omega - u)^k\, du - \omega^k F_2(it_0) \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}),$$

$$\text{(b')} \quad \int\limits_0^x \left| \int\limits_0^\omega B(u)\, e^{-it_0 u} (\omega - u)^r\, du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}) \quad (r = 0, \ldots, k-1) \text{ für } k = [k] > 0,$$

$$\int\limits_0^x \left| \int\limits_0^\omega B(u)\, e^{-it_0 u} (\omega - u)^{k-r}\, du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}) \quad (r = 1, \ldots, [k]+1) \text{ für } k \neq [k].$$

Für die Bestätigung von (a) genügt daher der Nachweis von

$$\int_0^\omega \varphi(u)\, e^{-it_0 u}(\omega - u)^k du = \omega^k\big(F(it_0) - F_2(it_0)\big) + o(\omega^k),$$

und zwar an allen bezeichneten Stellen nach Maßgabe der Fälle $k = 0$ und $k > 0$.

Nach den grundlegenden Sätzen über Fourierintegrale (vgl. [7], p. 13, theorem 3 und p. 30, theorem 15) ist

$$\int_{-\omega}^{\omega} (\omega - |u|)^k e^{-it_0 u}\varphi(u)\, du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\omega}(\omega - |u|)^k e^{-it_0 u} du \int_{t_1}^{t_2} F(it)\, e^{iut} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\omega}(\omega - |u|)^k e^{it_0 u} du \int_{t_1}^{t_2} F(it)\, e^{-iut} dt = \omega^k F(it_0) + o(\omega^k).$$

Andererseits ist

$$\int_{-\omega}^{0} \varphi(u)\, e^{-it_0 u} du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{0} e^{-it_0 u} du \int_{t_1}^{t_2} F(it)\, e^{iut} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_2} F(it)\,\frac{1 - e^{-\omega(it - it_0)}}{it - it_0}\, d(it) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,\frac{1 - e^{-\omega(z - it_0)}}{z - it_0}\, dz = F_2(it_0) + o(1),$$

und wegen der Konsistenz allgemein für $k \geqq 0$

$$\int_{-\omega}^{0} \varphi(u)\, e^{-it_0 u}(\omega - |u|)^k du = \omega^k F_2(it_0) + o(\omega^k).$$

Für die Bestätigung von (b) genügt der Nachweis von

$$\int_0^\omega \varphi(u)\, e^{-it_0 u}(\omega - u)^r du = o(\omega^k) \text{ für } -1 < r < k - 1;$$

das ist eine unmittelbare Folge von $\varphi(u) = o(1)$.

Satz 2 wird aus Hilfssatz 6 wie Satz 1 aus Hilfssatz 3 abgeleitet.

2. Teil: Typus l_n

Sei $1 \leqq l_1 < \cdots < l_n \uparrow \infty$, $k \geqq 0$ und

$$A_k(\omega) = \sum_{l_n < \omega} a_n(\omega - l_n)^k,\quad A_k(\omega, s) = \sum_{l_n < \omega} a_n l_n^{-s}(\omega - l_n)^k.$$

Dann gilt (vgl. [1], p. 62, lemma 3. 32)

$$(2.1)\quad A_k(\omega, s) = \omega^{-s} A_k(\omega) + \sum_{r=0}^{k}\binom{k+1}{r+1}\frac{\Gamma(s+r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(r+1)}\int_1^\omega A_k(u)\, u^{-s-r-1}(\omega - u)^r du$$

für $k = [k]$ und

$$(2.2)\quad A_k(\omega, s) = \omega^{-s} A_k(\omega) + \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-H)\,\Gamma(H+1)}\int_1^\omega A_H(u)(u^{-s} - \omega^{-s})(\omega - u)^{k-H-1} du$$

$$+ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(s)\,\Gamma(H+1)}\sum_{r=1}^{H+1}\binom{H+1}{r}\frac{\Gamma(s+r)}{\Gamma(k-H+r)}\int_1^\omega A_H(u)\, u^{-s-r}(\omega - u)^{k-H-1-r} du$$

für $k \neq [k]$, $H = [k] + 1$.

Hilfssatz 7. *Sei* $g(u) \geqq 0$, $\int_1^x g(u)\,du = Q(x^a)$ *und* $a > b$. *Dann gilt*

$$\int_1^x g(u)\,u^{-b}\,du = Q(x^{a-b}).$$

Hilfssatz 8. *Sei* $K \geqq 0$, t_0 *reell,* $b(u)$ *beschränkt, integrierbar in* $(1, \infty)$ *und*

$$\int_1^x |\,b(u)\,|^p\,du = Q(x^{Kp+1}).$$

Dann gilt

$$\text{(a)}\quad \int_1^x \left| \int_1^\omega b(u)\,u^{-it_0-K-1+k-r}(\omega-u)^r\,du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1})$$

für jedes Paar r, k *reeller Zahlen mit* $k \geqq 0$ *und* $-1 < r < k$,

$$\text{(b)}\quad \int_1^x \left| \int_1^\omega b(u)\,(u^{-it_0}-\omega^{-it_0})\,(\omega-u)^r\,du \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}),$$

falls $r = k - K - 1$, $-2 < r < -1$ *und* $k \geqq 0$ *ist.*

(c) *Es ist*

$$F(s) = \int_1^\infty b(u)\,u^{-s-K-1}\,du \text{ holomorph für } \operatorname{Re} s > 0;$$

ist $F(s)$ *auch noch holomorph in* it_0, *so gilt*

$$\int_1^x \left| \int_1^\omega b(u)\,u^{-it_0-K-1}(\omega-u)^k\,du - \omega^k F(it_0) \right|^p d\omega = Q(x^{kp+1}) \text{ für jedes } k \geqq 0$$

und sogar gleichmäßig in jedem beschränkten, abgeschlossenen Intervall der Holomorphie.

Beweis. Zu (a): Es ist

$$\begin{aligned}
&\int_1^x \left(\int_1^\omega |\,b(u)\,|\,u^{-K-1+k-r}\,du \right)^p d\omega \\
&\quad \ll \int_1^x d\omega \int_1^\omega |\,b(u)\,|^p u^{-Kp-1+k-r}(\omega-u)^r\,du \left(\int_1^\omega u^{k-r-1}(\omega-u)^r\,du \right)^{\frac{p}{q}} \\
&\quad \ll \int_1^x \omega^{k\frac{p}{q}} \int_1^\omega |\,b(u)\,|^p u^{-Kp-1+k-r}(\omega-u)^r\,du\,d\omega \\
&\quad \ll x^{k\frac{p}{q}} \int_1^x |\,b(u)\,|^p u^{-Kp-1+k-r}\,du \int_u^x (\omega-u)^r\,d\omega \\
&\quad \ll x^{k\frac{p}{q}+r+1} \int_1^x |\,b(u)\,|^p u^{-Kp-1+k-r}\,du \\
&\quad = Q(x^{kp+1}),
\end{aligned}$$

letzteres nach Hilfssatz 7.

Zu (b): Es ist

$$|\,u^{-it_0} - \omega^{-it_0}\,| \ll \begin{cases} \dfrac{\omega-u}{u} \\ 1 \end{cases}$$

und somit für $\omega \geqq 2$

$$\left| \int_1^\omega b(u)\,(u^{-il_0} - \omega^{-il_0})\,(\omega - u)^r\,du \right|^p$$

$$\ll \left(\int_1^{\frac{1}{2}\omega} |\,b(u)\,|\,(\omega - u)^r\,du \right)^p + \left(\int_{\frac{1}{2}\omega}^{\omega} |\,b(u)\,|\,u^{-1}(\omega - u)^{r+1}\,du \right)^p$$

$$\ll \omega^{(r+1)\frac{p}{q}} \int_1^{\frac{\omega}{2}} |\,b(u)\,|^p (\omega - u)^r\,du + \omega^{-p+(r+2)\frac{p}{q}} \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} |\,b(u)\,|^p (\omega - u)^{r+1}.$$

Für $x \geqq 4$ ist dann

$$\int_1^x \left| \int_1^\omega b(u)\,(u^{-il_0} - \omega^{-il_0})\,(\omega - u)^r\,du \right|^p d\omega$$

$$\ll 1 + \int_2^x \omega^{(r+1)\frac{p}{q}}\,d\omega \int_1^{\frac{\omega}{2}} |\,b(u)\,|^p (\omega - u)^r\,du + \int_2^x \omega^{-p+(r+2)\frac{p}{q}}\,d\omega \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} |\,b(u)\,|^p (\omega - u)^{r+1}\,du.$$

$$\int_2^x \omega^{(r+1)\frac{p}{q}}\,d\omega \int_1^{\frac{\omega}{2}} |\,b(u)\,|^p (\omega - u)^r\,du = \int_1^{\frac{x}{2}} |\,b(u)\,|^p\,du \int_{2u}^{x} \omega^{(r+1)\frac{p}{q}} (\omega - u)^r\,d\omega$$

$$\ll \int_1^{\frac{x}{2}} |\,b(u)\,|^p u^{(r+1)\frac{p}{q}}\,du \int_{2u}^{\infty} (\omega - u)^r\,d\omega \ll \int_1^{\frac{x}{2}} |\,b(u)\,|^p u^{(r+1)\frac{p}{q}+r+1}\,du$$

$$\ll \int_1^x |\,b(u)\,|^p u^{(r+1)p}\,du = \int_1^x |\,b(u)\,|^p u^{(k-K)p}\,du$$

$$= Q(x^{kp+1}),$$

letzteres nach Hilfssatz 7. Ferner ist

$$\int_2^x \omega^{-p+(r+2)\frac{p}{q}}\,d\omega \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} |\,b(u)\,|^p (\omega - u)^{r+1}\,du$$

$$\ll 1 + \int_2^{\frac{x}{2}} |\,b(u)\,|^p\,du \int_u^{2u} \omega^{-p+(r+2)\frac{p}{q}} (\omega - u)^{r+1}\,d\omega$$

$$+ \int_{\frac{x}{2}}^{x} |\,b(u)\,|^p\,du \int_u^{x} \omega^{-p+(r+2)\frac{p}{q}} (\omega - u)^{r+1}\,d\omega$$

$$\ll 1 + \int_2^{\frac{x}{2}} |^p\,b(u)\,|\,u^{-p+(r+2)\frac{p}{q}+r+2}\,du + x^{-p+(r+2)\frac{p}{q}+r+2} \int_{\frac{x}{2}}^{x} |\,b(u)\,|^p\,du$$

$$\ll 1 + \int_2^{\frac{x}{2}} |\,b(u)\,|^p u^{-p+(r+2)p}\,du + x^{-p+(r+2)p} Q(x^{Kp+1}) = Q(x^{kp+1}).$$

Zu (c): Aus

$$\left| \int_1^u b(t)\,dt \right| \leqq \left(\int_1^u |\,b(t)\,|^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}} u^{\frac{1}{q}} \ll u^{K+1}$$

folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $F(s) = \int_1^\infty b(u)\,u^{-s-K-1}\,du$ für $\operatorname{Re} s \geqq \delta > 0$ und somit die Holomorphie von $F(s)$ für $\operatorname{Re} s > 0$.

Sei $G(s, x) = \int_1^x \left| \omega^s \left[\int_1^\omega b(u)\,u^{-s-K-1}(\omega - u)^k\,du - \omega^k F(s) \right] \right|^p d\omega$, und sei

$$|\operatorname{Re} s| \leqq \frac{1}{p}.$$

1) Für $\operatorname{Re} s > 0$ und $k > 0$ ergibt sich

$$G(s,x) = \int_1^x \left| \omega^s k \left[\int_1^\omega b(u)\, u^{-s-K-1}\, du \int_u^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt - F(s) \int_0^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt \right] \right|^p d\omega$$

$$= k^p \int_1^x \left| \omega^s \left[\int_1^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt \int_1^t b(u)\, u^{-s-K-1}\, du - F(s) \left(\int_0^1 + \int_1^\omega \right) (\omega - t)^{k-1}\, dt \right] \right|^p d\omega$$

$$= k^p \int_1^x \left| \omega^s \left[\int_1^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt \int_t^\infty b(u)\, u^{-s-K-1}\, du - F(s) \int_0^1 (\omega - t)^{k-1}\, dt \right] \right|^p d\omega$$

$$\ll \int_1^x \omega^{\sigma p} \left(\int_1^\omega \omega - t)^{k-1}\, dt \int_t^\infty |\, b(u)\, |\, u^{-\sigma-K-1}\, du \right)^p d\omega + \int_1^x \omega^{\sigma p + (k-1)p}\, d\omega .$$

Nun ist

$$\int_1^x \omega^{p(k+\sigma-1)}\, d\omega = o(x^{kp+1})$$

wegen $\sigma < 1$; weiter ist

$$\left(\int_1^\omega \int_t^\infty (\omega - t)^{k-1}\, |b(u)|\, u^{-\sigma-K-1}\, du\, dt \right)^p$$

$$\ll \int_1^\omega \int_t^\infty (\omega - t)^{k-1}\, |\, b(u)\, |^p u^{-\sigma-Kp-1}\, du\, dt \left(\int_1^\omega \int_t^\infty (\omega - t)^{k-1} u^{-\sigma-1}\, du\, dt \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leqq \int_1^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt \int_t^\infty |\, b(u)\, |^p u^{-\sigma-Kp-1}\, du \left(\int_0^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt \int_t^\infty u^{-\sigma-1}\, du \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\ll \sigma^{-\frac{p}{q}} \omega^{(k-\sigma)\frac{p}{q}} \int_1^\omega (\omega - t)^{k-1}\, dt \int_t^\infty |\, b(u)\, |^p u^{-\sigma-Kp-1}\, du .$$

$$\int_t^\infty |\, b(u)\, |^p u^{-\sigma-Kp-1}\, du$$

$$= \left[u^{-\sigma-Kp-1} \int_1^u |\, b(v)\, |^p dv \right]_t^\infty + (\sigma + Kp + 1) \int_t^\infty u^{-\sigma-Kp-2}\, du \int_1^u |\, b(v)\, |^p dv$$

$$= Q(t^{-\sigma}) + \int_t^\infty Q(u^{-\sigma-1})\, du = \sigma^{-1} Q(t^{-\sigma});$$

$$\int_1^\omega (\omega - t)^{k-1} Q(t^{-\sigma})\, dt = Q(\omega^{k-\sigma});$$

insgesamt gilt daher für $\sigma > 0$:

$$G(s,x) \ll Q(x^{kp+1}) + \sigma^{-1-\frac{p}{q}} \int_1^x Q\left(\omega^{\sigma p + (k-\sigma)\frac{p}{q} + k - \sigma} \right) d\omega$$

$$= Q(x^{kp+1}) + \sigma^{-p} \int_1^x Q(\omega^{kp})\, d\omega = \sigma^{-p} Q(x^{kp+1}).$$

Im Falle $k = 0$ verfahre man ähnlich.

2) $\operatorname{Re} s < 0$:

$$G(s,x) \ll \int_1^x \omega^{-|\sigma|p} \left(\int_1^\omega |\, b(u)\, |\, u^{|\sigma|-K-1} (\omega - u)^k\, du \right)^p d\omega + \int_1^x \omega^{(k-|\sigma|)p}\, d\omega$$

$$\ll \int_1^x \omega^{-|\sigma|p}\, d\omega \left(\int_1^\omega |\, b(u)\, |^p u^{|\sigma|-Kp-1}\, du \right) \left(\int_0^\omega u^{|\sigma|-1} (\omega - u)^{kq}\, du \right)^{\frac{p}{q}} + x^{(k-|\sigma|)p+1},$$

letzteres wegen $|\sigma| < \frac{1}{p}$,

$$\ll \int_1^x \omega^{-|\sigma|p} |\sigma|^{-1} Q(\omega^{|\sigma|}) |\sigma|^{-\frac{p}{q}} \omega^{kp+|\sigma|\frac{p}{q}} d\omega + x^{(k-|\sigma|)p+1}$$

$$\ll |\sigma|^{-p} \int_1^x Q(\omega^{kp})\, d\omega + x^{(k-|\sigma|)p+1} = |\sigma|^{-p} Q(x^{kp+1}) + x^{(k-|\sigma|)p+1}.$$

Insgesamt ergibt sich also: In einer Umgebung von it_0 gilt für $0 < |\sigma| < \frac{1}{p}$ die Abschätzung

$$G(s, x) \ll |\sigma|^{-p} Q(x^{kp+1}) + x^{(k-|\sigma|)p+1}.$$

Auf dem Rande eines wie in Hilfssatz 2 gewählten, außerdem im Streifen $|\sigma| < \frac{1}{p}$ enthaltenen Rechteckes R gilt sodann für die Funktion

$$\varphi(s, \omega) = (s - iT_1)(s - iT_2)\, \omega^s \left[\int_1^\omega b(u)\, u^{-s-K-1} (\omega - u)^k du - \omega^k F(s) \right]$$

die Abschätzung

$$\int_1^x |\varphi(s, \omega)|^p d\omega \ll Q(x^{kp+1}) + |\sigma|^p x^{(k-|\sigma|)p+1} = Q(x^{kp+1}).$$

Hieraus folgt unmittelbar (c).

Beweis von Satz 3. Im Falle $s_0 = 0$ schließt man wie früher.

Sonst unterscheidet man die Fälle

1. $k = [k]$. Man setze $b(u) = A_k(u)\, u^{-c}$, $F(s) = \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(s)}{\Gamma(k+1+s)} f(s)$ und wende Hilfssatz 8 (a), (c) auf (2. 1) an.

2. $k \neq [k]$. Man setze $H = [k] + 1$, $b(u) = A_H(u)\, u^{-c}$, $F(s) = \frac{\Gamma(H+1)\,\Gamma(s)}{\Gamma(H+1+s)} f(s)$, $K = H$ und wende Hilfssatz 8 (a), (b), (c) auf (2. 2) an.

Literatur

[1] *K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram*, Typical means. Bombay 1952.

[2] *M. Glatfeld*, On strong Rieszian summability. Proc. Glasgow Math. Assoc. **3** (1957), 123—131.

[3] *J. E. Littlewood*, Lectures on the theory of functions. Oxford 1944.

[4] *S. Prasad, Pramila Srivastava*, On strong Riesz summability of Dirichlet series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, Part A **26** (1960) supplement II, 180—209.

[5] *H.-E. Richert*, Einführung in die Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen. Nachr. Akad. Wissensch. Göttingen II math. phys. Kl. Nr. 2 (**1960**), 17—75.

[6] *M. Riesz*, Über die Summation durch typische Mittel. Acta Sceged. **2** (1924), 18—31.

[7] *E. C. Titchmarsh*, Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford 1948.

Eingegangen 28. Mai 1964

Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme

Von *Joseph Hersch* in Zürich

§ 1. Einleitung

1. 1. Es ist wohl bekannt, daß bei vielen Rand- und Eigenwertproblemen eine Symmetrie des Grundgebietes eine entsprechende Symmetrie der Lösungs- bzw. Eigenfunktionen zur Folge hat.

Ist z. B. das ebene Gebiet G symmetrisch bezüglich der x-Achse, so folgt dieselbe Eigenschaft für die erste Eigenfunktion $v_1(x, y)$ einer schwingenden Membran, welche G bedeckt und längs des Randes Γ festgehalten wird: $\Delta v_1 + \lambda_1^G v_1 = 0$ in G, $v_1 = 0$ längs Γ; es gilt nämlich $v_1(x, -y) = v_1(x, y)$. Man kann diese elementare Eigenschaft etwa folgendermaßen beweisen: Die Funktion $\tilde{v}(x, y) = v_1(x, y) - v_1(x, -y)$ ist in der oberen Hälfte $Q = G \cap \{y > 0\}$ von G definiert, erfüllt dort $\Delta\tilde{v} + \lambda_1^G \tilde{v} = 0$ und verschwindet längs des Randes γ von Q; da Q einen höheren Grundton hat als G (Monotonie), ist $\tilde{v} \equiv 0$, q. e. d.

1. 2. Die vorliegende Arbeit gilt einer Verallgemeinerung dieser Betrachtung auf Gebiete G, welche aus einem Teilgebiet Q durch fortgesetzte Spiegelungen an einer beliebigen (geradlinigen) Kante von Q entstehen. Die Überlegung ist so elementar, daß sie vielleicht schon längst bekannt und wieder in Vergessenheit geraten sein dürfte; jedenfalls erlaubt sie bei der numerischen Behandlung von Rand- und Eigenwertproblemen Vereinfachungen (siehe § 4), welche in Standardwerken darüber [1] nicht verwendet werden.

1. 3. Das (zusammenhängende) Gebiet G soll folgenden *Voraussetzungen* genügen:

$$G = Q_1^+ \cup Q_2^+ \cup \cdots \cup Q_m^+ \cup Q_1^- \cup Q_2^- \cup \cdots \cup Q_n^- \cup K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\xi \quad (m, n, \xi \geqq 1)$$

mit paarweise punktfremden Untermengen Q_i^+, Q_j^-, K_k folgender Art:

— Alle Q_i^+ sind direkt kongruente Teilgebiete („Zellen"); wir setzen $Q_1^+ = Q$;

— alle Q_j^- sind direkt kongruente Zellen, jedoch zu Q anti-kongruent;

— jede Menge K_k ist eine geradlinige Strecke, welche eine Q_i^+ von einer Q_j^- trennt, und zwar sei Q_j^- das Spiegelbild von Q_i^+ bezüglich K_k. (Siehe Fig. 1.)

Bemerkung. Zwei Teilgebiete Q_i^+ und Q_j^+ dürfen eine gemeinsame Randstrecke haben; diese ist dann aber *kein* K_k, sie gehört nicht zum Gebiet G, sondern (doppelt gezählt) zum Rand Γ von G.

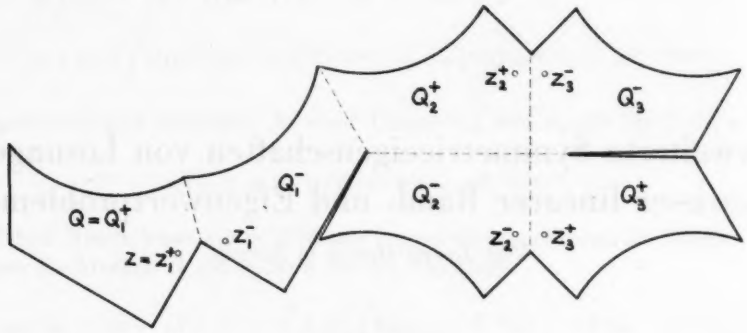


Fig. 1

Sei $z = z_1^+$ ein Punkt in $Q = Q_1^+$; durch fortgesetzte Spiegelung an den Strecken K_k können wir in jedem $Q_i^\pm$ einen Punkt $z_i^\pm$ konstruieren: $z_1^+, \ldots, z_m^+, z_1^-, \ldots, z_n^-$; *wir setzen* (vielleicht unnötigerweise) *voraus, daß keine weitere Spiegelung an eine K-Strecke zu einem weiteren Punkt z_l führt.*

Alle unsere Voraussetzungen sind erfüllt, wenn das betrachtete Gebiet G durch wiederholte Spiegelung eines Rechtecks oder eines gleichseitigen Dreiecks (oder eines Dreiecks mit Winkeln 90°45°45° oder 90°60°30°) *entsteht.*

1. 4. Wir führen noch folgende *Bezeichnungen* ein:

Sei $\gamma_i^\pm$ die Randkurve von $Q_i^\pm$; einem Punkt $r_1^+ \in \gamma_1^+$ entsprechen Punkte $r_i^\pm \in \gamma_i^\pm$. Jeder dieser $r_i^\pm$ gehört entweder zu Γ, oder er liegt auf einer inneren „Spiegelkante" zwischen einer Zelle Q_i^+ und einer Zelle Q_j^-; *im letzteren Fall ist offenbar* $r_i^+ = r_j^-$.

Der (reelle) Parameter s soll die Punkte auf Γ, der Parameter σ die Punkte auf $\gamma = \gamma_1^+$ beschreiben. Zu einem Wert von σ gehört ein Punkt r_1^+, also m Punkte r_i^+ und n Punkte r_j^-; davon seien $p \leqq m$ Punkte r_i^+ auf Γ, ebenso $q \leqq n$ Punkte $r_j^- \in \Gamma$ $(p, q \geqq 0;$ $m - p = n - q)$. Diese $p + q$ Punkte entsprechen gewissen Werten von s, die wir mit $s = \sigma^{(1)+}, \ldots, \sigma^{(p)+}, \sigma^{(1)-}, \ldots, \sigma^{(q)-}$ bezeichnen wollen.

§ 2. Randwertprobleme zur Poissonschen Gleichung

2. 1. *Dirichletsches Problem.*

2. 1. 1. Wir betrachten folgendes Dirichlet-Problem zur Poissonschen Gleichung:

$$\Delta v = -\varrho(z) \text{ in } G, \; v = f(s) \text{ längs } \Gamma. \tag{1}$$

Sei wieder $\gamma = \gamma_1^+$ der Rand von $Q = Q_1^+$; für alle $z = z_1^+ \in Q$ ist die Funktion

$$\tilde{v}(z) = v(z_1^+) + \cdots + v(z_m^+) - v(z_1^-) - \cdots - v(z_n^-) \tag{2}$$

definiert; sie ist die Lösung des folgenden Randwertproblems in Q:

$$\Delta\tilde{v} = -\tilde{\varrho}(z) \text{ in } Q, \; \tilde{v} = \tilde{f}(\sigma) \text{ längs } \gamma, \tag{3}$$

wobei

$$\tilde{\varrho}(z) = \varrho(z_1^+) + \cdots + \varrho(z_m^+) - \varrho(z_1^-) - \cdots - \varrho(z_n^-) \tag{4}$$

und

$$(5) \qquad \tilde{f}(\sigma) = f(\sigma^{(1)+}) + \cdots + f(\sigma^{(p)+}) - f(\sigma^{(1)-}) - \cdots - f(\sigma^{(q)-}).$$

Die Gültigkeit von (5) folgt einfach daraus, daß *sich die Beiträge der inneren Punkte* $r_i^+ = r_j^-$ *paarweise aufheben*: $v(r_i^+) - v(r_j^-) = 0$.

Kann man das Randwertproblem (3) in Q lösen, so liefert (2) bei bekanntem $\tilde{v}(z)$ eine endliche, lineare, durch die unbekannte Lösungsfunktion $v(z)$ befriedigte Funktionalgleichung. — Qualitativ formuliert: durch Lösung eines *lokalen* Problems bekommt man eine diskrete *globale* Gleichung für die Lösungsfunktion. — Zu dem Gedanken der Zerlegung eines Problems in globale und lokale Teilprobleme, vgl. [2], sowie die Arbeit [4], die von derjenigen [7] von H. F. Weinberger angeregt wurde.

2. 1. 2. *Beispiele* (vgl. Fig. 2).

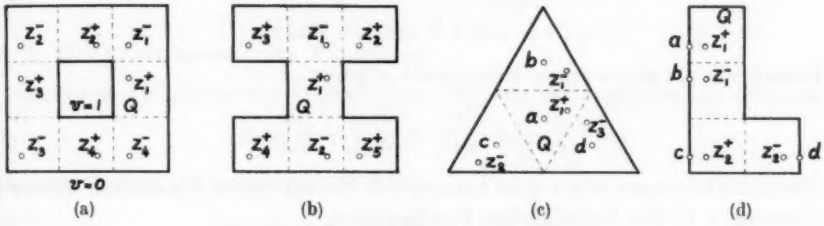


Fig. 2

(a) *Laplacesche Gleichung* $\Delta v = 0$;

$$v = \begin{cases} 0 \text{ längs der äußeren Randkurve;} \\ 1 \text{ längs der inneren Randkurve.} \end{cases}$$

$\Delta\tilde{v} = 0$ in Q und $\tilde{v} = 1$ längs γ, also $\tilde{v} \equiv 1$ in Q:

$$v(z_1^+) - v(z_1^-) + v(z_2^+) - v(z_2^-) + v(z_3^+) - v(z_3^-) + v(z_4^+) - v(z_4^-) \equiv 1.$$

Liegt insbesondere z_1^+ *im Mittelpunkt von* Q, so haben wir (Symmetrie, vgl. 1. 1) $v(z_1^+) = v(z_2^+) = v(z_3^+) = v(z_4^+)$ und $v(z_1^-) = v(z_2^-) = v(z_3^-) = v(z_4^-)$; daher

$$v(z_1^+) - v(z_1^-) = \frac{1}{4}.$$

(b) *Torsion eines I-Profils*

$\Delta v = -2$ in G, $v = 0$ längs des Randes Γ.

$$\tilde{v}(z) = v(z_1^+) + v(z_2^+) - v(z_1^-) + v(z_3^+) + v(z_4^+) - v(z_2^-) + v(z_5^+);$$

$\Delta\tilde{v} = -6$ in Q und $\tilde{v} = 0$ längs γ; also löst die Funktion $\tilde{v}(z)/3$ das Torsionsproblem für das Quadrat Q. Dies ist gerade das zunächst zu lösende „lokale Problem".

Liegt insbesondere $z = z_1^+$ *im Mittelpunkt von* Q, so gilt (Symmetrie)

$$v(z_2^+) = v(z_3^+) = v(z_4^+) = v(z_5^+) \text{ und } v(z_1^-) = v(z_2^-),$$

also

$$v(z_1^+) - 2v(z_1^-) + 4v(z_2^+) = \tilde{v}(z).$$

(c) *Torsion eines gleichseitigen Dreiecks*

$\Delta v = -2$ in G, $v = 0$ längs des Randes Γ.

$$\tilde{v}(z) = v(z_1^+) - v(z_1^-) - v(z_2^-) - v(z_3^-);$$

$\Delta\tilde{v} = +4$ in Q, $\tilde{v} = 0$ längs γ; die Funktion $-\tilde{v}/2$ löst also das Torsionsproblem für das Dreieck Q.

Liegt insbesondere z_1^+ *im Zentrum* a, so ist $z_1^- = b$, $z_2^- = c$, $z_3^- = d$, und es gilt (Symmetrie) $v(b) = v(c) = v(d)$, also

$$v(a) - 3v(b) = v(a) - v(b) - v(c) - v(d) = \tilde{v}(a) = -2 \cdot \frac{1}{4} v(a)$$

(Q hat halbe Seitenlänge),

$$v(a) = 2v(b).$$

(d) *Torsion eines L-Profils*

$\Delta v = -2$ in G, $v = 0$ längs Γ; $\tilde{v}(z) = v(z_1^+) - v(z_1^-) + v(z_2^+) - v(z_2^-)$; $\Delta\tilde{v} = 0$ in Q, $\tilde{v} = 0$ längs γ, also $\tilde{v} \equiv 0$ in Q:

$$v(z_1^+) + v(z_2^+) = v(z_1^-) + v(z_2^-).$$

Lassen wir z_1^+ gegen einen Randpunkt a gehen:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_a + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_c = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_b + \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_d.$$

Diese Normalableitungen von v sind bekanntlich bis auf einem konstanten Faktor gleich den Spannungen in den betreffenden Randpunkten.

2. 1. 3. *Bemerkungen.* (a) Die Methode kann auch im umgekehrten Sinne angewandt werden: Wird ein Randwertproblem in Q gegeben und kann man ein entsprechendes (zu konstruierendes) Hilfsproblem im zusammengesetzten Gebiete G lösen, so läßt sich die gesuchte Lösung $\tilde{v}$ in Q aus derjenigen v in G nach (2) konstruieren.

(b) Die Methode läßt sich u. U. [$\Sigma \pm v(z_i^{\pm})$ absolut konvergent] auf den Fall übertragen, wo G unendlich viele Zellen Q_i^+ und Q_i^- enthält. Siehe dazu die Bemerkung unter 2. 4. 2 sowie 4. 2 und 4. 3.

(c) Im Falle der Laplaceschen Gleichung $\Delta v = 0$ kann man die beschriebene Methode auch dann verwenden, wenn die K_k Kreisbögen (statt Strecken, vgl. 1. 3) sind; dann sollen Q_i^+ und Q_j^- *invers* sein in bezug auf die Kreisbögen.

2. 2. *Neumannsches Problem.*

2. 2. 1. Bei diesem Problem dürfen die Voraussetzungen in 1. 3. insofern etwas gelockert werden, daß zwischen den Q_i^+ und den Q_j^- nicht mehr zu unterscheiden ist: $G = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_\nu \cup K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\varepsilon$; jede Kante K_k trennt eine Zelle Q_i von einer anderen Q_j; dabei soll Q_j das Spiegelbild von Q_i bezüglich K_k sein. Weiter soll (wie in 1. 3) jedem Punkt $z_1 \in Q_1$ in jedem Q_i ein und nur ein Punkt z_i (durch fortgesetzte Spiegelung) entsprechen.

2. 2. 2. Gegeben sei folgendes Neumannsches Problem zur Poissonschen Gleichung:

$$(1') \qquad \Delta u = -\varrho(z) \text{ in } G, \ \partial u/\partial n = g(s) \text{ längs } \Gamma$$

(Normalableitung *nach außen*), wobei die gegebenen Funktionen $\varrho(z)$ und $g(s)$ die Lösbarkeitsbedingung

$$(6) \qquad \oint_\Gamma g\, ds = -\iint_G \varrho\, dx dy$$

nach Voraussetzung befriedigen sollen.

Sei $z = z_1 \in Q = Q_1$; die Funktion

$$(2') \qquad \hat{u}(z) = u(z_1) + \cdots + u(z_\nu)$$

löst in Q das Randwertproblem

$$(3') \qquad \Delta\hat{u} = -\hat{\varrho}(z) \text{ in } Q,\ \partial\hat{u}/\partial n = \hat{g}(\sigma) \text{ längs } \gamma = \gamma_1,$$

wobei

$$(4') \qquad \hat{\varrho}(z) = \varrho(z_1) + \cdots + \varrho(z_\nu)$$

und

$$(5') \qquad \hat{g}(\sigma) = g(\sigma_1) + \cdots + g(\sigma_\mu) \qquad (\mu = p + q < \nu = m + n).$$

Die Gültigkeit von (5′) folgt wieder daraus, daß sich die Beiträge der inneren Punkte $r_i = r_j$ paarweise aufheben: $\delta u/\delta n_i + \delta u/\delta n_j = 0$.

Die Lösbarkeitsbedingung (6) überträgt sich von selbst von G auf Q:

$$(6') \qquad \oint_\gamma \hat{g}\, d\sigma = -\iint_Q \hat{\varrho}\, dx\, dy.$$

2. 3. *Konjugiert-harmonische Funktionen.*

Betrachten wir wieder das Dirichletsche Problem zur Laplaceschen Gleichung

$$(1'') \qquad \Delta v = 0 \text{ in } G,\ v = f(s) \text{ längs } \Gamma;$$

und das „zugehörige" Neumannsche Problem

$$(1''') \qquad \Delta u = 0 \text{ in } G,\ \partial u/\partial n = df/ds \text{ längs } \Gamma.$$

(Die Lösbarkeitsbedingung $\oint_\Gamma (df/ds)\, ds = 0$ des Neumannschen Problems ist erfüllt.)

$\partial u/\partial n = \partial v/\partial s$ längs Γ, die harmonischen Lösungsfunktionen u und v sind *konjugiert* zueinander.

Gemäß (2′) und (2) definieren wir in Q die (*ebenfalls harmonischen*) Funktionen

$$\hat{u}(z) = \Sigma\, u(z_i^+) + \Sigma\, u(z_j^-);\ \tilde{v}(z) = \Sigma\, v(z_i^+) - \Sigma\, v(z_j^-).$$

Längs des Randes γ von Q ist $\tilde{v}(\sigma) = \tilde{f}(\sigma)$ definiert durch (5); bei der Berechnung von $\partial\hat{u}/\partial n$ beachte man, daß $d\sigma^{(i)+}/d\sigma = +1$ aber $d\sigma^{(j)-}/d\sigma = -1$ ist; also gilt

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial n} = \Sigma\, \frac{df}{d\sigma^{(i)+}} + \Sigma\, \frac{df}{d\sigma^{(j)-}} = \frac{d}{d\sigma}\left(\Sigma\, f(\sigma^{(i)+}) - \Sigma\, f(\sigma^{(j)-})\right) = \frac{d\tilde{f}}{d\sigma} = \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\sigma}.$$

Also sind auch die harmonischen Funktionen $\hat{u}$ und $\tilde{v}$ konjugiert. *Aus einer in G analytischen Funktion $w = u + iv$ ist also eine in Q analytische Funktion $\breve{w} = \hat{u} + i\tilde{v}$ entstanden.* — Dies leuchtet auch direkt ein:

$$(2'') \qquad \breve{w}(z) = \Sigma\, w(z_i^+) + \Sigma\, \overline{w}(z_j^-);$$

jede Abbildung $z_i^+(z)$ ist konform, jede $z_j^-(z)$ antikonform; folglich sind alle Funktionen $w(z_i^+(z))$ und $\overline{w}(z_j^-(z))$ analytisch, ihre Summe also ebenfalls. — Diese Betrachtung wird durch das Schwarzsche Spiegelungsprinzip der Funktionentheorie nahegelegt.

2. 4. *Greensche Funktion.*

2. 4. 1. Wir definieren die Greensche Funktion $g(z, \zeta; G)$ in einem Gebiete G bei festem $\zeta \in G$ durch folgendes Dirichlet-Problem zur Poissonschen Gleichung:

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta_z g(z, \zeta; G) = -\delta_\zeta \text{ (Diracsches Maß im Punkte } \zeta), \\ g(z, \zeta; G) = 0 \text{ für } z \in \Gamma. \end{cases}$$

Mit dieser Normierung ist bekanntlich bei einem Jordan-Gebiet G in der Umgebung der Singularität ζ:

$$g(z, \zeta; G) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_\zeta(G)}{|z - \zeta|} + \circ(z - \zeta), \tag{8}$$

wobei $R_\zeta(G)$ den *Abbildungsradius* von G im Punkte ζ bezeichnet.

Unter den in 1. 3 gemachten Voraussetzungen haben wir nun nach 2. 1. 1 mit $\zeta \in Q = Q_1^+$ und $v(z) = g(z, \zeta; G)$: $\Delta \tilde{v} = -\delta_\zeta$ und $\tilde{v} = 0$ längs γ; also $\tilde{v}(z) = g(z, \zeta; Q)$; d.h.

$$g(z, \zeta; Q) = \sum_1^m g(z_i^+, \zeta; G) - \sum_1^n g(z_j^-, \zeta; G), \tag{9}$$

oder

$$g(z, \zeta; G) - g(z, \zeta; Q) = \sum_1^n g(z_j^-, \zeta; G) - \sum_2^m g(z_i^+, \zeta; G);$$

dies ist eine in Q definierte harmonische Funktion, welche nach (8) in der Umgebung des Punktes ζ die Form $(1/2\pi)\ln[R_\zeta(G)/R_\zeta(Q)] + \circ(z - \zeta)$ hat; setzen wir insbesondere $z = \zeta$, so erhalten wir (mit $\zeta = \zeta_1^+$):

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_\zeta(G)}{R_\zeta(Q)} = \sum_1^n g(\zeta_j^-, \zeta; G) - \sum_2^m g(\zeta_i^+, \zeta; G). \tag{10}$$

Liegt dagegen ζ auf einer inneren Kante oder in einer inneren Ecke, so ist $\sum_1^m g(z_i^+, \zeta, G) - \sum_1^n g(z_j^-, \zeta, G) = 0$.

Bemerkung. Läßt man ζ gegen einen Randpunkt von Q streben, so ergibt sich aus (9) wegen $-\partial g/\partial n = d\omega/ds$ (ω = harmonisches Maß im Punkte z) eine entsprechende Beziehung für ω; diese kann man ebensogut nach 2. 1 direkt herleiten.

2. 4. 2. *Beispiel*: G = *gleichseitiges Dreieck* (Fig. 2(c)).

Hier ist $m = 1$ und $n = 3$; wählen wir $\zeta = a$ (Zentrum), dann ist $\zeta_1^- = b$, $\zeta_2^- = c$, $\zeta_3^- = d$ und (Symmetrie) $g(b, a; G) = g(c, a; G) = g(d, a; G)$; andererseits ist offenbar $R_a(G) = 2R_a(Q)$, wir erhalten also (elementar, ohne jede konforme Abbildung) $(1/2\pi)\ln 2 = 3g(b, a; G)$, d. h.

$$2\pi g(a, b; G) = \frac{1}{3} \ln 2. \tag{11}$$

Dieselbe Überlegung ergibt mit $\zeta = b$:

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_b(G)}{R_b(Q_1^-)} = g(b, a; G) - g(b, c; G) - g(b, d; G) = g(b, a; G) - 2g(b, c; G). \tag{11'}$$

$R_b(Q_1^-) = R_a(Q) = (1/2)\, R_a(G)$; eine elementare Betrachtung in einem konform äquivalenten Kreis $|w| < 1$ (die explizite Abbildung $w(z)$ vermeiden wir) ergibt wegen (11):

$$2 \cdot 2\pi g(b, c; G) = -\ln\left(2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\right).$$

Aus (11′) folgt dann bei Berücksichtigung von (11):

$$\ln[R_b(G)/R_a(G)] = -\ln 2 + (1/3)\ln 2 + \ln\left(2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\right) = \ln\left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right)$$

$$R_b(G)/R_a(G) = 2^{\frac{2}{3}} - 1 \cong 0{,}5874. \tag{11''}$$

Numerischer Vergleich: Pólya-Szegö ([6], p. 256) geben an: $R_a(G) = 0{,}3774 \cdot h$ ($h =$ *Höhe* des Dreiecks G); anderseits ist (Monotonie) $R_b(G) < R_b(\text{Winkelgebiet} > G) = (2/9)h$, also muß sein $R_b(G)/R_a(G) < 2/(9 \cdot 0{,}3774) \cong 0{,}5888$, was mit (11″) sehr gut übereinstimmt.

Bemerkung zu diesem Beispiel. Wählt man für G einen unendlichen Streifen, den man in unendlich viele gleichseitige Dreiecke $Q_i^{\pm}$ einteilt, so liefern (9) und (10) mit $m = n = \infty$ die Greensche Funktion als unendliche Summe bzw. den Abbildungsradius als unendliches Produkt [vgl. 2. 1. 3(b)].

Allgemeine Bemerkung. Die Beziehung (3) von 2. 1. 1 kann auch mit Hilfe der Greenschen Funktionen in allen $Q_i^{\pm}$ hergeleitet werden: Sei $\zeta = \zeta_1^+$ fest $\in Q_1^+$; wir definieren folgende Funktion $g(z)$ in G: in Q_i^+ sei $g(z) = +g(z, \zeta_i; Q_i^+)$; in Q_j^- sei $g(z) = -g(z, \zeta_j; Q_j^-)$; längs der K_k ist $g(z)$ null und differenzierbar. $\Delta g(z) = -\Sigma\, \delta_{\zeta_i^+} + \Sigma\, \delta_{\zeta_j^-}$; nach (1) gilt

$$0 = \iint_G (\Delta v + \varrho)\, g\, dx dy = -\oint_\Gamma f\, \partial g/\partial n\, ds + \iint_G v \Delta g\, dx dy + \iint_G \varrho\, g\, dx dy$$

$$= -\oint_\gamma \tilde{f}\, \partial g/\partial n\, ds - \tilde{v}(\zeta) + \iint_Q \tilde{\varrho}\, g\, dx dy,$$

was mit (3) gleichwertig ist.

2. 5. *Gemischtes Dirichlet-Neumannsches Problem.*

2. 5. 1. *Der Rand Γ von G sei in zwei solche Teile Γ_1, Γ_2 zerlegt,* daß folgende *Bedingungen* erfüllt sind:

(a) Es gibt *kein* Paar von Randpunkten $r_1 \in \Gamma_1$, $r_2 \in \Gamma_2$, welche durch fortgesetzte Spiegelung an den K_k ineinander übergehen.

(b) Geht eine geradlinige Randstrecke $S < \Gamma$ durch fortgesetzte Spiegelung an den K_k in eine innere Kante K_i über, so muß S entweder ganz in Γ_1 oder ganz in Γ_2 sein.

Unter diesen beiden Voraussetzungen läßt sich die Menge $\mathfrak{K}$ aller *inneren Kanten* K_k in drei (eventuell leere) zueinander fremde Klassen *einteilen*:

$\mathfrak{K}_1 =$ Klasse der K_k, welche durch wiederholte Spiegelung in eine Randstrecke $S_1 < \Gamma_1$ übergehen;

$\mathfrak{K}_2 =$ Klasse der K_k, welche in eine $S_2 < \Gamma_2$ übergehen;

$\mathfrak{K}_3 =$ Klasse der K_k, welche in *keine* Randkante übergehen („reine innere Kanten").

Letztere Klasse $\mathfrak{K}_3$ zerfällt noch in „Äquivalenzklassen" von reinen inneren Kanten, welche ineinander übergehen. Diese Äquivalenzklassen teilen wir willkürlich in $\mathfrak{K}_{31}$ und $\mathfrak{K}_{32}$ ein.

Nun wollen wir auch die Menge $\{Q\}$ aller *Zellen* in zwei fremde Klassen *einteilen*:

$\{Q^+\} =$ Zellen, welche in eine bestimmte $Q = Q_1^+$ durch eine beliebige Anzahl von Spiegelungen an Strecken von $\mathfrak{K}_2 \cup \mathfrak{K}_{32}$ und eine *gerade* Anzahl von Spiegelungen an Strecken von $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_{31}$ übergehen;

$\{Q^-\} =$ Zellen, welche in Q_1^+ durch eine beliebige Anzahl von Spiegelungen an Strecken von $\mathfrak{K}_2 \cup \mathfrak{K}_{32}$ und eine *ungerade* Anzahl von Spiegelungen an Strecken von $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_{31}$ übergehen.

Wir setzen voraus, daß diese Einteilung eindeutig ist, d. h. daß in jeder endlichen Folge von Spiegelungen, welche Q_1^+ in sich selbst überführt, die Spiegelungen an Strecken von $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_{31}$ in gerader Anzahl vorkommen. (Vielleicht ist diese Voraussetzung überflüssig.)

2. 5. 2. Sei nun $u(z)$ die Lösung des gemischten Randwertproblems in G:

$$(1^{\mathrm{IV}})\quad \Delta u = -\varrho(z) \text{ in } G,\ u = f(s) \text{ längs } \Gamma_1,\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(s) \text{ längs } \Gamma_2.$$

Nennen wir γ_1 den Teil des Randes γ von Q, welcher entweder Γ_1 oder $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_{31}$ angehört; dann gehört $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ zu $\Gamma_2 \cup \mathfrak{K}_2 \cup \mathfrak{K}_{32}$.

Sei $z \in Q$, $z_i^{\pm}$ der entsprechende Punkt in $Q_i^{\pm}$; die Funktion

$$(2''')\qquad \tilde{u}(z) = \Sigma\, u(z_i^+) - \Sigma\, u(z_j^-)$$

ist die Lösung des Randwertproblems

$$(3'')\qquad \Delta\tilde{u} = -\tilde{\varrho}(z) \text{ in } Q,\ \tilde{u} = \tilde{f}(\sigma) \text{ längs } \gamma_1,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \tilde{g}(\sigma) \text{ längs } \gamma_2$$

mit

$$(4)\qquad \tilde{\varrho}(z) = \Sigma\, \varrho(z_i^+) - \Sigma\, \varrho(z_j^-),$$

$$(5)\qquad \tilde{f}(\sigma) = \Sigma\, f(\sigma^{(i)+}) - \Sigma\, f(\sigma^{(j)-}),$$

$$(5'')\qquad \tilde{g}(\sigma) = \Sigma\, g(\sigma^{(i)+}) - \Sigma\, g(\sigma^{(j)-}).$$

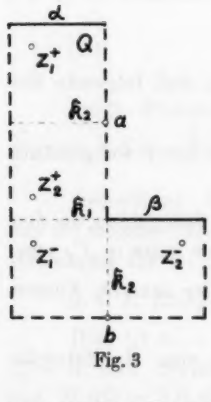


Fig. 3

2. 5. 3 *Beispiel* (vgl. Fig. 3)

$$\Delta u = 0 \text{ in } G;$$

$$u = 1 \text{ längs } \alpha,\ u = 0 \text{ längs } \beta,\ \partial u/\partial n = 0 \text{ längs } \Gamma - \alpha - \beta.$$

Γ_1 besteht aus α und β; $\mathfrak{K}_1$ enthält eine innere Kante, $\mathfrak{K}_2$ zwei.

$$\Delta\tilde{u} = 0,\ \tilde{u} = 1 \text{ längs } \alpha,\ \partial\tilde{u}/\partial n = 0 \text{ längs } \gamma - \alpha;$$

also ist $\tilde{u} \equiv 1$ in Q:

$$u(z_1^+) + u(z_2^+) - u(z_1^-) - u(z_2^-) \equiv 1;$$

insbesondere ist also $u(a) - u(b) = 0{,}5$.

Bemerkungen. (a) Die Betrachtung von 2. 3 läßt sich auch hier übertragen; beim Übergang zur konjugiert-harmonischen Funktion vertauschen Γ_1 und Γ_2 ihre Rollen, also auch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$: die Einteilung der Zellen in $\{Q^+\}$ und $\{Q^-\}$ wird anders. — Z. B. bekommt man im Fall von Fig. 3 aus einer in G analytischen Funktion $w = u + iv$ die in Q analytische Funktion

$$\check{w}(z) = w(z_1^+) + \overline{w}(z_2^+) - w(z_1^-) - \overline{w}(z_2^-).$$

(b) Beim Dirichletschen Problem 2. 1 ist Γ_2 leer, also auch $\mathfrak{K}_2$; beim Neumannschen Problem 2. 2 ist Γ_1 leer, also auch $\mathfrak{K}_1$; in beiden Fällen ist aber $\mathfrak{K}_3$ oft nicht leer, d. h. man hat noch eigentlich die Freiheit der Einteilung in $\mathfrak{K}_{31}$ und $\mathfrak{K}_{32}$. — Beispiel: Eine einzige Kante K, $G = Q_1^+ \cup Q_1^- \cup K$: man darf hier ebensogut $\tilde{v}(z) = v(z_1^+) - v(z_1^-)$ wie auch $\hat{v}(z) = v(z_1^+) + v(z_1^-)$ bilden; tut man letzteres, so geht ein Dirichletsches Problem in G in ein gemischtes Problem in $Q = Q_1^+$ über (mit $\partial\hat{v}/\partial n = 0$ längs K).

§ 3. Ein Eigenwertproblem: die schwingende homogene Membran

3. 1. *Fester Rand.*

3. 1. 1. Das Gebiet G erfülle wieder die in 1. 3 gemachten Voraussetzungen. Sei λ ein Eigenwert von G, v die zugehörige Eigenfunktion:

$$(12)\qquad \Delta v + \lambda v = 0 \text{ in } G,\ v = 0 \text{ längs } \Gamma.$$

Wir definieren wieder

$$\tilde{v}(z) = \Sigma\, v(z_i^+) - \Sigma\, v(z_j^-); \tag{2}$$

für diese Funktion gilt

$$\Delta\tilde{v} + \lambda\tilde{v} = 0 \text{ in } Q \text{ und } \tilde{v} = 0 \text{ längs des Randes } \gamma \text{ von } Q; \tag{13}$$

wir unterscheiden zunächst zwei Fälle:

(a) λ ist *kein* Eigenwert von Q; dann muß sein $\tilde{v}(z) \equiv 0$ in Q,

$$\Sigma\, v(z_i^+) - \Sigma\, v(z_j^-) \equiv 0; \tag{14}$$

(b) λ *ist* ein Eigenwert von Q; dann ist $\tilde{v}(z)$ entweder identisch Null oder eine zu λ gehörige Eigenfunktion von Q. Umgekehrt ist klar, daß jeder Eigenwert von Q auch Eigenwert von G ist: sei $\tilde{v}(z)$ eine zugehörige Eigenfunktion in Q, dann können wir $\tilde{v}$ zu einer (hier ebenfalls mit $\tilde{v}$ bezeichneten) Eigenfunktion in ganz G fortsetzen:

$$\tilde{v}(z_i^+) = \tilde{v}(z_1^+), \quad \tilde{v}(z_j^-) = -\tilde{v}(z_1^+). \tag{15}$$

Die Vielfachheit eines Eigenwertes λ ist daher *höchstens* so groß in Q wie in G, aber i. A. kleiner [z. B. im Fall (a): „Vielfachheit Null" in Q].

Sei λ ein Eigenwert von G mit der Vielfachheit t, so gibt es dazu t linear unabhängige Eigenfunktionen $v_1, \ldots, v_t$ in G; wir konstruieren nach (2) $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_t$ in Q; hat λ in Q eine Vielfachheit $\tau < t$, so sind $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_t$ linear abhängig, d. h. es existiert eine (bzw. mehrere) $\tilde{v} = \alpha_1\tilde{v}_1 + \cdots + \alpha_t\tilde{v}_t \equiv 0$ in Q, wobei die α nicht sämtlich verschwinden. Also gibt es in G eine zu λ gehörige Eigenfunktion, nämlich $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t$, welche die Gleichung (14) befriedigt; genauer: es gibt $t - \tau$ unabhängige solche Funktionen. *Die Gleichung* (14) *erfaßt* (also auch im Falle der Entartung) *sämtliche beim Übergang von G nach Q „verlorengehende" Eigenfunktionen von G* („Kern der Verpflanzung (2)"). *Alle übrigen Eigenfunktionen von G bekommt man aus denjenigen von Q durch die Fortsetzungsvorschrift* (15).

3. 1. 2. *Beispiel: Gleichseitiges Dreieck*, Fig. 2(c).

Zu jedem λ, dessen Vielfachheit in Q kleiner ist als in G, erfüllt eine zugehörige Eigenfunktion v die Identität

$$v(z_1^+) - v(z_1^-) - v(z_2^-) - v(z_3^-) \equiv 0;$$

die erste Eigenfunktion v_1 erfüllt also (wegen der Symmetrie $v_1(b) = v_1(c) = v_1(d)$):

$$v_1(a) = 3v_1(b).$$

3. 2. *Freier Rand.*

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } G, \ \partial u/\partial n = 0 \text{ längs } \Gamma.$$

Wie in 2. 2 braucht man hier nicht mehr zwischen Q_i^+ und Q_j^- zu unterscheiden; die Zellen werden mit $Q_1, \ldots, Q_\nu$ bezeichnet. — Die Funktion

$$\hat{u}(z) = u(z_1) + \cdots + u(z_\nu) \tag{2'}$$

erfüllt $\Delta\hat{u} + \lambda\hat{u} = 0$ in Q und $\partial\hat{u}/\partial n = 0$ längs γ; sie ist also entweder Eigenfunktion der freien Membran in Q (zu demselben Eigenwert λ) oder identisch Null.

Die Überlegungen von 3. 1 lassen sich hier übertragen mit dem einzigen Unterschied, daß sich jetzt jede Eigenfunktion $\hat{u}$ der freien Membran in Q zu einer ebensolchen in G fortsetzen läßt durch

$$\hat{u}(z_i) = \hat{u}(z_1). \tag{15'}$$

3. 3. *Teilweise fester, teilweise freier Rand*

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2;\ \Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } G,\ u = 0 \text{ längs } \Gamma_1,\ \partial u/\partial n = 0 \text{ längs } \Gamma_2.$$

Unter den in 2. 5. 1 gemachten Voraussetzungen teilen wir die Zellen in $\{Q^+\}$ und $\{Q^-\}$ wie dort ein und setzen wieder

$$(2''') \qquad \tilde{u}(z) = \Sigma\, u(z_i^+) - \Sigma\, u(z_j^-);$$

diese Funktion erfüllt $\Delta\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = 0$ in Q, $\tilde{u} = 0$ längs γ_1, $\partial\tilde{u}/\partial n = 0$ längs γ_2, ist also entweder eine Eigenfunktion in Q zum Eigenwert λ oder identisch Null. Auch hier lassen sich die Überlegungen von 3. 1 übertragen.

Beispiel: *L-Gebiet* (Fig. 3), $\Gamma_1 = \alpha \cup \beta$, $\Gamma_2 = \Gamma - \alpha - \beta$.

Die Funktion $\tilde{u}(z) = u(z_1^+) + u(z_2^+) - u(z_1^-) - u(z_2^-)$ $(z \in Q)$ erfüllt am Rande γ von Q: $\tilde{u} = 0$ längs α, $\partial\tilde{u}/\partial n = 0$ längs $\gamma - \alpha$. — Ist insbesondere $\lambda = \lambda_1$ und $u = u_1$ (erste Eigenfunktion von G), so ist λ_1 kleiner als der erste Eigenwert von Q, d. h. $\tilde{u}_1 \equiv 0$ in Q,

$$u_1(z_1^+) + u_1(z_2^+) \equiv u_1(z_1^-) + u_1(z_2^-), \quad u_1(a) = u_1(b).$$

Die *Bemerkung* (b) am Schluß des Abschnittes 2. 5 bleibt auch hier gültig: auch bei festem bzw. freiem Rand Γ (3. 1 bzw. 3. 2) bleibt uns eigentlich bei nicht-leerer Klasse $\mathfrak{K}_3$ noch die Freiheit ihrer Einteilung in $\mathfrak{K}_{31}$ und $\mathfrak{K}_{32}$.

§ 4. Anwendungen bei numerischen Näherungsmethoden

4. 1. *Differenzengleichungen.*

4. 1. 1. Entsprechende Überlegungen können ebenfalls für die (diskreten) Lösungen v_h von Differenzengleichungen aufgestellt werden (h = Maschenweite). Das „lokale" Problem (in einer Zelle) besteht nun in der Lösung eines Gleichungssystems mit weniger Unbekannten $\tilde{v}_h$ als im gegebenen Problem: *Die „globalen" Gleichungen erlauben, die Anzahl der* ursprünglichen *Unbekannten v_h zu reduzieren.* Natürlich hängen auch diese globalen Gleichungen im allgemeinen von dem gewählten Differenzenverfahren ab.

4. 1. 2. *Randwertprobleme.* Hier sind die erhaltenen „globalen" Gleichungen offenbar Linearkombinationen der gegebenen Differenzengleichungen. Sie können als Kontrolle dienen und die Rechnungen vereinfachen, i. A. jedoch nicht wesentlich.

Beispiele: vgl. Fig. 2.

(a) Vgl. Collatz [1], S. 421 und 423—4. Das kleine Quadrat habe die Seite a, das größere die Seite $3a$. Die Differenzengleichung sei $\Delta_h v_h = 0$.

Sei jetzt $z = z_1^+$ ein Gitterpunkt in $Q \cup \gamma$; die diskrete Funktion $\tilde{v}_h(z) = \Sigma\, v_h(z_i^+) - \Sigma\, v_h(z_j^-)$ erfüllt $\Delta_h \tilde{v}_h = 0$ in den inneren Gitterpunkten von Q und $\tilde{v}_h = 1$ in den Randpunkten; also ist hier $\tilde{v}_h \equiv 1$ in allen Gitterpunkten von Q, welchen diskreten Laplace-Operator Δ_h man auch gewählt hat. Wie erwartet, erfüllen die von Collatz berechneten Werte die Relationen:

$$h = a/2: \qquad \begin{aligned} 0{,}4583 &- 0{,}2083 = 0{,}25 \\ 0{,}4495 &- 0{,}1995 = 0{,}25 \\ 0{,}46203 &- 0{,}21203 = 0{,}25 \end{aligned}$$

$h = a/4$: $\quad 0{,}45170 - 0{,}20170 = 0{,}25$

$$2 \cdot 0{,}43827 + 0{,}71175 + 0{,}21851 - 2 \cdot 0{,}30353 - 2 \cdot 0{,}09986$$
$$= 1{,}00002 = 1 \text{ bis auf Rundungsfehler;}$$
$$2 \cdot 0{,}69765 + 2 \cdot 0{,}21117 - 0{,}47205 - 2 \cdot 0{,}14782 - 0{,}04993$$
$$= 1{,}00002 = 1 \text{ bis auf Rundungsfehler.}$$

(b) Vgl. Collatz [1], S. 421 und 424—5. Torsion eines I-Profils, bestehend aus 7 Quadraten von der Seitenlänge a. — Wählen wir als $Q = Q_1^+$ das zentrale Quadrat, so erfüllt die diskrete Funktion

$$\tilde{v}_h(z) = v_h(z_1^+) + v_h(z_2^+) + v_h(z_3^+) + v_h(z_4^+) + v_h(z_5^+) - v_h(z_1^-) - v_h(z_2^-)$$

die Differenzengleichung $\Delta_h \tilde{v}_h = (5-2) \cdot (-2) = -6$ in den inneren Gitterpunkten von Q und $\tilde{v}_h = 0$ in den Gitterpunkten auf γ. Man hat also bei Verwendung des *klassischen Differenzenoperators* Δ_h mit $h = \frac{a}{2}$:

$4\tilde{v}_h(\text{Zentrum}) - 0 - 0 - 0 - 0 = 6h^2$, d. h. $\tilde{v}_h(\text{Zentrum}) = \frac{3}{2}h^2 = \frac{3}{8}a^2$; in der Tat erfüllen die Werte von Collatz die Relation

$$\frac{347}{334}h^2 - 2 \cdot \frac{425}{334}h^2 + 4 \cdot \frac{251}{334}h^2 = \frac{501}{334}h^2 = \frac{3}{2}h^2.$$

Verwendet man dagegen das Mehrstellenverfahren $\left(\text{ebenfalls mit } h = \frac{a}{2}\right)$, so erhält man $40\tilde{v}_h\,(\text{Zentrum}) - 8(0+0+0+0) - 2(0+0+0+0) = 6 \cdot 12h^2 = 18a^2$, d. h. $\tilde{v}_h(\text{Zentrum}) = 0{,}45a^2$. — In der Tat ist

$$0{,}26744\,a^2 - 2 \cdot 0{,}31618\,a^2 + 4 \cdot 0{,}20373\,a^2 = 0{,}45000\,a^2.$$

Bemerkung. Kann man das „lokale" kontinuierliche Randwertproblem genau lösen, so besteht überdies die Möglichkeit, die Kenntnis der „globalen Gleichungen" zur Verbesserung der Differenzen-Approximation zu verwenden.

4. 1. 3. *Eigenwertproblem*: schwingende homogene Membran.

Im Gegensatz zu 4. 1. 2 erlauben jetzt die „globalen" Gleichungen, *welche den* (unbekannten) *diskreten Eigenwert nicht enthalten*, eine wesentliche Vereinfachung der Rechnungen.

Wieder (vgl. § 3) bestehen dieselben Möglichkeiten:

(i) Ist $\tilde{v}_h \equiv 0$, dann gehört zu jedem inneren Gitterpunkt z von Q eine „globale" Gleichung; mit ihrer Hilfe kann der Wert $v_h(z)$ der diskreten Eigenfunktion v_h eliminiert werden. Sei n_G die Anzahl der inneren Gitterpunkte von G, n_Q diejenige der inneren Gitterpunkte von Q; nach der erwähnten Elimination bleiben nur noch $n_G - n_Q$ lineare (den Eigenwert als Parameter enthaltende) Gleichungen in ebenso vielen Unbekannten (Gitterwerten von v_h); d. h. die Ordnung der säkulären Determinante und des charakteristischen Polynoms beträgt nur noch $n_G - n_Q$; man findet ebensoviele Eigenwerte (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten).

(ii) Ist dagegen $\tilde{v}_h \not\equiv 0$, so ist der zu v_h in G gehörige diskrete Eigenwert auch Eigenwert in Q (zur diskreten Eigenfunktion $\tilde{v}_h$); diese n_Q Eigenwerte sind aber gerade diejenigen, welche uns fehlten.

Anders ausgedrückt: Durch diese einfache geometrische Betrachtung kann man die säkuläre Determinante der Ordnung n_G ersetzen durch ein Paar von säkulären Determinanten: eine „globale" der Ordnung $n_G - n_Q$ und eine „lokale" der Ordnung n_Q. Die Eigenwerte sind (zusammen genommen) wieder die ursprünglichen; der Zusammenhang

der Eigenfunktionen zu den früheren ist einleuchtend. Das ursprüngliche charakteristische Polynom ist das Produkt des „globalen" und des „lokalen".

Besitzt überdies das betrachtete Gebiet einige Symmetrieachsen, so wird man auch dies natürlich zur weiteren Reduzierung der Anzahl der Unbekannten verwenden.

Beispiel: Fig. 4. Wir interessieren uns hier nur für diejenigen Eigenwerte der abgebildeten Membran („Schweizer-Kreuz"), deren Eigenfunktionen bezüglich der Symmetrieachsen der Figur symmetrisch sind.

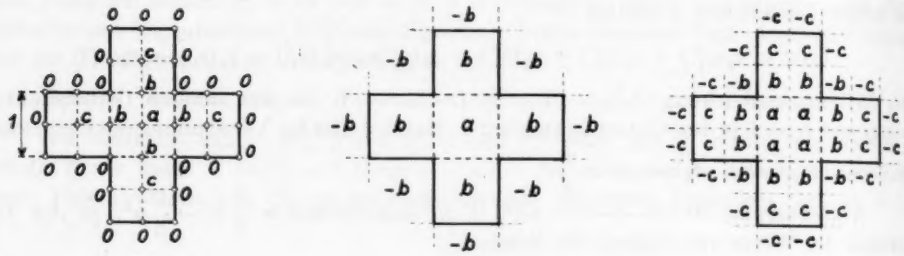


Fig. 4

(α) *Mit Eckenfunktionen.* Wir betrachten die diskrete Gleichung

$$A_h \cdot v(z) - v(z+h) - v(z+ih) - v(z-h) - v(z-ih) = 0. \tag{16}$$

A_h spielt die Rolle eines diskreten Eigenwertes, vgl. [2]; klassisch schreibt man $A_h = 4 - h^2\lambda_h$; das größte A_h entspricht dem kleinsten λ_h.

Hier sei die Maschenweite $h = \frac{1}{2}$; *a, b und c seien die Werte der zu A_h gehörigen diskreten Eigenfunktion v_h.*

N. B.: Charakteristisches Polynom dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} A_h & -4 & 0 \\ -1 & A_h & -1 \\ 0 & -1 & A_h \end{vmatrix} = A_h^3 - 5A_h.$$

Sei Q die zentrale Zelle (Quadrat von der Seite 1); unter Berücksichtigung der Symmetrie lauten nun unsere Gleichungen:

$$\tilde{v}_h(\text{Zentrum}) = a - 4c \text{ und } \tilde{v}_h(\text{Kantenmitten von } Q) = 0;$$

$\tilde{v}_h$ ist also entweder $\equiv 0$ oder diskrete Eigenfunktion von Q mit den Randwerten 0.

„Globales Problem": $\tilde{v}_h \equiv 0$, also ist $a = 4c$; die Differenzengleichungen werden:

$$A_h \cdot (4c) - 4b = 0;\ A_h \cdot b - (4c) - c = 0;\ A_h \cdot c - b = 0.$$

Die erste und die letzte sind identisch (wie es sein muß); charakteristisches Polynom zweiten Grades:

$$\begin{vmatrix} A_h & -5 \\ -1 & A_h \end{vmatrix} = A_h^2 - 5;$$

die charakteristische Gleichung liefert also $A_h = \pm\sqrt{5}$ (zugehörige diskrete Eigenfunktion: $a : b : c = 4 : \pm\sqrt{5} : 1$).

„Lokales Problem" in Q (entspricht $\tilde{v}_h \not\equiv 0$): $A_h \cdot a - 0 = 0$, einziger Eigenwert: $A_h = 0$, das charakteristische Polynom $\equiv A_h$ ist ersten Grades. (Zugehörige Eigenfunktion $\tilde{v}_h$, fortgesetzt auf G: $a : b : c = 1 : 0 : -1$.)

Wir verifizieren: $A_h \cdot (A_h^2 - 5) =$ ursprüngliches charakteristisches Polynom.

(β, γ) *Mit Zellenfunktionen* (vgl. [2]), „Spiegelung am Rande" und entsprechender diskreter Gleichung (16); *jetzt sind a, b, c die Werte von v_h in den Zellen.* — Daß $\tilde{v}_h$ wieder der Randbedingung „Spiegelung" genügt, zeigt eine unschwere Diskussion.

(β) *Maschenweite* $h = 1$.

N. B.: Charakteristisches Polynom zweiten Grades:

$$\begin{vmatrix} A_h & -4 \\ -1 & A_h + 3 \end{vmatrix} = A_h^2 + 3A_h - 4.$$

$$\tilde{v}_h = \begin{cases} a - 4b \text{ in der zentralen Zelle;} \\ 4b - a \text{ in den vier anderen Zellen.} \end{cases}$$

Also verschwindet entweder $\tilde{v}_h$ identisch, oder es ist diskrete Eigenfunktion von Q mit der „Spiegelung am Rande" als Randbedingung.

„Globales Problem": $\tilde{v}_h \equiv 0$, also $a = 4b$; die Differenzengleichungen werden:

$$A_h \cdot (4b) - 4b = 0; \; (A_h + 3) \cdot b - (4b) = 0;$$

sie sind miteinander identisch und liefern $A_h = 1$ (zugehörige Eigenfunktion: $a : b = 4 : 1$). Das charakteristische Polynom $A_h - 1$ ist ersten Grades.

„Lokales Problem" in Q mit Spiegelung am Rande (entspricht $\tilde{v} \not\equiv 0$): $A_h \cdot a - 4 \cdot (-a) = 0$; das charakteristische Polynom $A_h + 4$ ist ersten Grades; Eigenwert $A_h = -4$ (zugehörige Eigenfunktion $\tilde{v}$, fortgesetzt auf G: $a : b = 1 : -1$). Wir verifizieren wieder: $(A_h - 1)(A_h + 4) = A_h^2 + 3A_h - 4 =$ ursprüngliches charakteristisches Polynom.

(γ) *Maschenweite* $h = \frac{1}{2}$.

N. B.: Charakteristisches Polynom dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} A_h - 2 & -2 & 0 \\ -1 & A_h & -1 \\ 0 & -1 & A_h + 1 \end{vmatrix} = A_h^3 - A_h^2 - 5A_h.$$

Nun besteht die Zelle Q aus den 4 zentralen Quadraten.

$$\tilde{v}_h = \begin{cases} a - 2b - 2c \text{ in den Quadraten innerhalb } Q; \\ b - a + b + 2c \text{ in den am Rande } \gamma \text{ von } Q \text{ gespiegelten Quadraten.} \end{cases}$$

Nach der Konstruktion von $\tilde{v}_h$ müssen die Ausdrücke entgegengesetzt gleich sein (Spiegelung).

„Globales Problem": $\tilde{v}_h \equiv 0$, also $a = 2b + 2c$; die Differenzengleichungen werden:

$$(A_h - 2) \cdot (2b + 2c) - 2b = 0; \; A_h \cdot b - (2b + 2c) - c = 0; \; (A_h + 1) \cdot c - b = 0;$$

die erste ist zweimal die Summe der beiden anderen, darf also übersehen werden; charakteristisches Polynom:

$$\begin{vmatrix} A_h - 2 & -3 \\ -1 & A_h + 1 \end{vmatrix} = A_h^2 - A_h - 5;$$

die charakteristische Gleichung ergibt also $A_k = (1 \pm \sqrt{21})/2$. [Zugehörige Eigenfunktion: $a : b : c = (10 \pm 2\sqrt{21}) : (3 \pm \sqrt{21}) : 2$.]

„Lokales Problem" in Q mit Spiegelung am Rande: $A_k \cdot a - 2a - 2(-a) = 0$, das charakteristische Polynom A_k ist ersten Grades. Eigenwert: $A_k = 0$ (zugehörige Eigenfunktion $\tilde{v}$, fortgesetzt auf G: $a : b : c = 1 : -1 : -1$). — Wir verifizieren wieder: $A_k(A_k^2 - A_k - 5) =$ ursprüngliches charakteristisches Polynom.

4. 2. *Abschätzung von Gebietsfunktionalen vermittels Variationsmethoden.*

Will man ein Gebietsfunktional (z. B. Kapazität, Torsionssteifigkeit, Grundton einer schwingenden Membran) durch Anwendung eines Extremalprinzips (z. B. Prinzip von Dirichlet, Thomson oder Rayleigh) nach oben oder nach unten abschätzen, so erlaubt die Kenntnis der „globalen Gleichungen", bessere zugelassene Probierfunktionen zu konstruieren: nämlich solche, welche diese Gleichungen erfüllen. [Im Spezialfall, wo G aus nur zwei gespiegelten Zellen Q_1^+, Q_1^- besteht (mit einer einzigen inneren Kante) war das schon immer üblich: eine symmetrische Lösungsfunktion wird durch eine symmetrische Probierfunktion angenähert.]

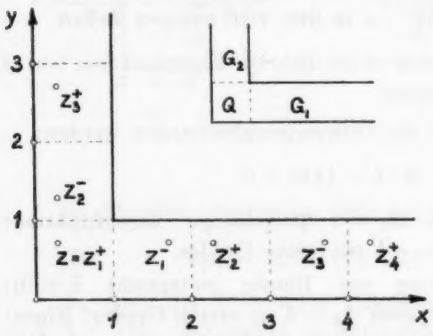


Fig. 5

Beispiel (Fig. 5): Wir konstruieren eine obere Schranke für den ersten Eigenwert λ_1 einer unendlichen L-Membran

$$(\Delta v + \lambda_1 v = 0 \text{ und } v > 0 \text{ in } G,\ v = 0$$

längs des Randes Γ) auf Grund des Rayleighschen Prinzips.

Wir definieren eine Probierfunktion $V(x, y)$ zunächst in G_1 und in G_2:

$$\begin{aligned} &\text{In } G_1: \quad V(x, y) = C e^{-kx} \sin(\pi y); \\ &\text{in } G_2: \quad V(x, y) = C \sin(\pi x)\, e^{-ky}. \end{aligned} \qquad (k > 0 \text{ willkürlich})$$

Die „globale" Gleichung (14) behält ihre Gültigkeit in diesem Fall von unendlich vielen Zellen [vgl. 2. 1. 3(b)]; wir definieren entsprechend: In Q:

$$V(z) = V(z_1^+) = \sum_1^\infty V(z_j^-) - \sum_2^\infty V(z_i^+), \text{ d. h.}$$

$$\begin{aligned} V(x,y) = {} & [V(2-x,y) + V(4-x,y) + V(6-x,y) + \cdots] - [V(2+x,y) + V(4+x,y) + \cdots] \\ & + [V(x, 2-y) + V(x, 4-y) + \cdots] - [V(x, 2+y) + V(x, 4+y) + \cdots]; \end{aligned}$$

$$V(2-x, y) + V(4-x, y) + \cdots = C \sin(\pi y)\, e^{-k(2-x)}/(1 - e^{-2k}), \text{ usw.,}$$

daher

$$V(x, y) = C(e^{-k}/\operatorname{Sh} k)\,[\operatorname{Sh}(kx) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \operatorname{Sh}(ky)].$$

Wählen wir etwa $C = e^k \operatorname{Sh} k$, so haben wir

$$\begin{aligned} &\text{in } G_1: \quad V(x, y) = \operatorname{Sh} k \cdot e^{-k(x-1)} \sin(\pi y), \\ &\text{in } G_2: \quad V(x, y) = \operatorname{Sh} k \cdot \sin(\pi x)\, e^{-k(y-1)}, \\ &\text{in } Q: \quad V(x, y) = \operatorname{Sh}(kx) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \operatorname{Sh}(ky). \end{aligned}$$

Wir verifizieren: die Funktion $V(x,y)$ ist stetig in $G \cup \Gamma$ und verschwindet längs Γ. Sie genügt sowohl in G_1 und G_2 wie auch in Q der Differentialgleichung $\Delta V + (\pi^2 - k^2) V = 0$ (*aber ihr Gradient ist unstetig; sonst hätten wir schon die erste Eigenfunktion*!).

Elementar läßt sich der Rayleighsche Quotient $R[V]$ berechnen; er liefert (für jedes positive k) eine obere Schranke für λ_1; das optimale k realisiert das Minimum von $R[V]$.

Aber schon $k = 1$ liefert $\lambda_1 < R[V] \cong 9{,}39$. Diese obere Schranke ist genauer als die „triviale" $\lambda_1 \leqq \pi^2$. (Monotonie-Eigenschaft: G enthält ein Rechteck von Seiten a und 1 mit beliebig großem a, also ist $\lambda_1 < \pi^2(1 + a^{-2})$, folglich $\lambda_1 \leqq \pi^2$; vgl. auch Pólyas „alternierende Symmetrisierung" [5].) — Eine untere Schranke wurde ([3], S. 401) mit Hilfe der „Methode der eindimensionalen Hilfsprobleme" konstruiert: $\lambda_1 > 8{,}5835$; also ist

$$8{,}5835 < \lambda_1 < 9{,}39.$$

4. 3. *Umformulierung eines gegebenen Problems.*

Wir betrachten dasselbe Beispiel (Fig. 5).

In G_1 erfüllen die Funktionen $f_n(x)\sin(n\pi y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, die Membrangleichung $\Delta v + \lambda v = 0$, wenn $f_n'' - n^2\pi^2 f_n + \lambda f_n = 0$ ist; wählen wir also $f_n(x) = C_n e^{-k_n x}$ mit $k_n = \sqrt{n^2\pi^2 - \lambda}$, dann ist auch $f_n(+\infty, y) = 0$. — Hier haben wir ein vollständiges Erzeugendensystem im Raum der Funktionen in G_1, welche dort bei fest gegebenem λ sowohl die Differentialgleichung $\Delta v + \lambda v = 0$ wie auch die Randbedingungen längs $y = 0$ und $y = 1$ und in $x = \infty$ erfüllen.

Wir setzen noch $C_n = c_n e^{k_n} \operatorname{Sh} k_n$ (vgl. 4. 2) und entwickeln die zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion $v(x, y)$:

$$\text{In } G_1\text{:} \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{Sh} k_n \cdot e^{-k_n(x-1)} \sin(n\pi y);$$

$$\text{in } G_2\text{:} \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{Sh} k_n \cdot e^{-k_n(y-1)} \sin(n\pi x).$$

Ist überdies λ kein Eigenwert der Zelle Q, so folgt aus $\tilde{v} \equiv 0$ die Gültigkeit der „globalen Gleichung" (14), daher

$$\text{in } Q\text{:} \quad v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n[\operatorname{Sh}(k_n x)\sin(n\pi y) + \sin(n\pi x)\operatorname{Sh}(k_n y)].$$

Bei jeder Wahl der c_n hat diese Funktion $v(x, y)$ folgende Eigenschaften:

(a) Sie ist in $G \cup \Gamma$ stetig und hat die Randwerte Null.

(b) Sowohl in G_1 und G_2 wie auch in Q erfüllt sie die Gleichung $\Delta v + \lambda v = 0$.

Doch ist wiederum i. A. grad v in G unstetig; zur Stetigkeit müssen wir fordern, daß längs der inneren Strecke K_1 zwischen Q und $G_1 (x = 1)$ v_x stetig ist: dann ist wegen der Symmetrie der Funktion v ebenfalls v_y stetig längs der inneren Strecke K_2 zwischen Q und G_2 $(y = 1)$. Die Bedingung lautet also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n[k_n \operatorname{Ch} k_n \sin(n\pi y) + n\pi\cos(n\pi)\operatorname{Sh}(k_n y)] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n(-k_n)\operatorname{Sh} k_n \sin(n\pi y)$$

identisch in $0 < y < 1$, d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [k_n e^{k_n} \sin(n\pi y) + (-1)^n n\pi \operatorname{Sh}(k_n y)]\, c_n \equiv 0 \text{ in } 0 < y < 1.$$

Diese Identität kann in (0, 1) mit $\sin(m\pi y)$ skalar multipliziert werden, $m = 1, 2, 3, \ldots$; sie ist äquivalent mit dem daraus entstehenden System von unendlich

vielen linearen Gleichungen in den unendlich vielen Unbekannten $c_1, c_2, c_3, \ldots$, worin $k_n = \sqrt{n^2\pi^2 - \lambda}$ einzusetzen ist; das Verschwinden der entsprechenden unendlichen Determinante liefert eine transzendente Bedingung für λ; die kleinste Wurzel ist der gesuchte erste Eigenwert λ_1.

Diese Methode läßt sich auf verschiedene (endliche oder unendliche) Gebiete anwenden und betrifft ebensogut die höheren Eigenwerte.

Schlußbemerkungen. (a) Auch das Randwertproblem $\Delta v + kv = -\varrho(x, y)$ („erzwungene Schwingung") läßt sich nach dem Muster von § 2 behandeln. Ist das Problem in G lösbar, so auch in Q, denn (i) jeder Eigenwert von Q ist nach § 3 auch Eigenwert von G und (ii) ist $\tilde{v}$ eine in G nach (15) fortgesetzte Eigenfunktion von Q, so gilt

$$\iint_Q \tilde{\varrho}\tilde{v}\, dx\, dy = \iint_G \varrho\tilde{v}\, dx\, dy\text{: ist } \varrho \perp \tilde{v} \text{ in } G\text{, so ist auch } \tilde{\varrho} \perp \tilde{v} \text{ in } Q.$$

(b) Der Einfachheit halber betrachteten wir zweidimensionale Gebiete; nur der Abschnitt 2. 3 ist aber an der Dimension 2 wesentlich gebunden.

Literatur

[1] *L. Collatz*, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[2] *J. Hersch*, Contribution à la méthode des équations aux différences. ZAMP **9a** (1958), 129—180.

[3] *J. Hersch*, Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluations par défaut et principe de maximum. ZAMP **11** (1960), 387—413.

[4] *J. Hersch*, Lower bounds for all eigenvalues by cell functions: a refined form of H. F. Weinberger's method. Arch. Rat. Mech. Anal. **12** (1963), 361—366.

[5] *G. Pólya*, Circle, sphere, symmetrization and some classical physical problems. Modern Mathematics for the Engineer, 2nd series, McGraw-Hill 1961, 420—441.

[6] *G. Pólya* and *G. Szegö*, Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton 1951.

[7] *H. F. Weinberger*, Lower bounds for higher eigenvalues by finite difference methods. Pacific J. Math. 8 (1958), 339—368.

Eingegangen 29. Mai 1964

Über die Subordination analytischer Funktionen

Von *Christian Pommerenke* in Göttingen

§ 1. Einleitung

Sei $D = \{|z| < 1\}$ und sei $\mathfrak{B}$ die Familie der in D analytischen Funktionen $\varphi(z)$, die $\varphi(0) = 0$ und $|\varphi(z)| < 1$ für $|z| < 1$ erfüllen. Wenn $f(z)$ und $g(z)$ in D analytisch sind, so heißt $f(z)$ subordiniert unter $g(z)$, geschrieben $f(z) \prec g(z)$, wenn es eine Funktion $\varphi \in \mathfrak{B}$ gibt, so daß

$$f(z) = g(\varphi(z))$$

gilt. Dann ist $f(0) = g(0)$, $|f'(0)| \leqq |g'(0)|$, und zwar gilt $|f'(0)| = |g'(0)|$ genau dann, wenn $f(z) = g(e^{i\alpha}z)$ (α reell) ist. Wenn insbesondere $g(z)$ in D schlicht ist, so gilt $f(z) \prec g(z)$ genau dann, wenn $f(0) = g(0)$ ist und die Werte $f(z)$ für alle $z \in D$ im Bildgebiet $\{g(z) : |z| < 1\}$ liegen.

Definition 1. *Sei $E \subset (-\infty, +\infty)$. Eine Funktion $f(z, t)$ ($z \in D$, $t \in E$) heißt eine Subordinationskette über E, wenn $f(z, t)$ für jedes feste $t \in E$ in $\{|z| < 1\}$ analytisch ist und*[1]) *$f'(0, t) \neq 0$ erfüllt und wenn*

$$f(z, s) \prec f(z, t) \qquad (s \leqq t,\ s \in E,\ t \in E)$$

gilt. Die Subordinationskette heißt normiert, wenn $f(0, t) = 0$, $f'(0, t) = e^t$ ist.

Man rechnet nach, daß eine Subordinationskette $f(z, t)$ mit $\vartheta(t) = \arg f'(0, t)$ durch die Transformation

$$t^* = \log |f'(0, t)|, \quad f_*(z, t^*) = f(e^{-i\vartheta(t)}z, t) - f(0, t) \tag{1.1}$$

in eine normierte Subordinationskette übergeht. Daher wird es meist ausreichen, normierte Subordinationsketten zu betrachten.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen schlichten Funktionen und Subordinationsketten, insbesondere normierten Subordinationsketten über Intervallen. Man kann diese durch eine partielle Differentialgleichung charakterisieren, die eine Verallgemeinerung der Löwnerschen Differentialgleichung darstellt. Schlichte Subordinationsketten, in denen also für jedes t die Funktion $f(z, t)$ in $\{|z| < 1\}$ schlicht ist, wurden bereits mehrfach betrachtet, besonders im Zusammenhang mit der Differentialgleichung. Hier sind zu nennen die Arbeiten von Löwner [6], Golusin [4], Kufarev [5], Robertson [9] und Bielecki und Lewandowski [3].

[1]) Der Ableitungsstrich bezeichne immer die partielle Ableitung nach der ersten (komplexen) Variablen.

§ 2. Abschätzungen von Subordinationsketten

2. 1. Das folgende Lemma und seine Bezeichnungsweise wird im weiteren dauernd benutzt werden.

Lemma 1. *Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über E. Für $s \leqq t$, $s \in E$, $t \in E$ existieren dann eindeutig bestimmte Funktionen*

$$\varphi(z, s, t) = e^{s-t} z + \cdots \tag{2. 1}$$

aus $\mathfrak{B}$, so daß

$$f(z, s) = f(\varphi(z, s, t), t) \tag{2. 2}$$

ist. Für $s \leqq t \leqq \tau$, $s, t, \tau \in E$ ist

$$\varphi(z, s, \tau) = \varphi(\varphi(z, s, t), t, \tau). \tag{2. 3}$$

Aus (2. 3) ergibt sich, daß $e^t \varphi(z, s, t)$ für festes t eine normierte Subordinationskette über $s \in E \cap (-\infty, t]$ ist. Aus dem Schwarzschen Lemma und aus (2. 3) folgt weiter

$$|\varphi(z, s, \tau)| \leqq |\varphi(z, s, t)| \qquad (s \leqq t \leqq \tau). \tag{2. 4}$$

Beweis. Die Existenz der Funktion $\varphi(z, s, t) \in \mathfrak{B}$ ergibt sich aus der Definition der Subordination. Wegen $f'(0, t) = e^t \neq 0$ folgt aus (2. 2) die eindeutige Bestimmtheit. Durch dreimalige Anwendung von (2. 2) erhält man

$$\begin{aligned} f(\varphi(\varphi(z, s, t), t, \tau), \tau) &= f(\varphi(z, s, t), t) = f(z, s) \\ &= f(\varphi(z, s, \tau), \tau), \end{aligned}$$

und aus der eindeutigen Bestimmtheit folgt (2. 3).

Lemma 2. *Wenn die Funktionen $f_n(z)$ und $g_n(z)$ in D analytisch sind und $f_n(z) \prec g_n(z)$ erfüllen, und wenn $f_n(z) \to f(z)$, $g_n(z) \to g(z)$ lokal gleichmäßig in D streben, so ist $f(z) \prec g(z)$.*

Beweis. Es ist $f_n(z) = g_n(\varphi_n(z))$ mit $\varphi_n \in \mathfrak{B}$. Man kann eine Folge (n_ν) finden, so daß $\varphi_{n_\nu}(z) \to \varphi(z)$ strebt. Dann ist $\varphi \in \mathfrak{B}$ und $f(z) = g(\varphi(z))$, d. h. $f(z) \prec g(z)$.

2. 2. Satz 1. *Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über der nach oben beschränkten Menge E. Zu jedem $r < 1$ existiert dann ein $K(r)$, so daß für $s \in E$, $t \in E$ und $|z| \leqq r$ gilt*

$$|f(z, t) - f(z, s)| \leqq K(r)\, |t - s|.$$

Beweis. a) Sei etwa $s < t$. Nach (2. 2) gilt

$$\begin{aligned} f(z, t) - f(z, s) &= f(z, t) - f(\varphi(z, s, t), t) \\ &= \frac{e^t - e^s}{e^t + e^s} (z + \varphi(z, s, t))\, h(z, s, t)\, \frac{f(z, t) - f(\varphi(z, s, t), t)}{z - \varphi(z, s, t)}, \end{aligned} \tag{2. 5}$$

wobei

$$h(z, s, t) = \frac{e^t + e^s}{e^t - e^s} \cdot \frac{1 - z^{-1}\varphi(z, s, t)}{1 + z^{-1}\varphi(z, s, t)} \tag{2. 6}$$

ist. Wegen $\varphi(z, s, t) \in \mathfrak{B}$ ist $|\varphi(z, s, t)| < |z|$ nach dem Schwarzschen Lemma, also $\operatorname{Re} h(z, s, t) > 0$. Nach (2. 1) ist $h(0, s, t) = 1$. Es folgt [7, S. 169]

$$|h(z, s, t)| \leqq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \tag{2. 7}$$

b) Nach Voraussetzung ist $\tau = \sup E < \infty$. Wenn $\tau \notin E$ ist, so existiert eine Folge $\tau_n \in E$ mit $\tau_n \nearrow \tau$. Da $f(z, \tau_m) < f(z, \tau_n)$ für $m < n$ und $f'(0, \tau_n) = e^{\tau_n} < e^{\tau}$ ist, folgt [8], daß

$$f(z, \tau) = \lim_{n \to \infty} f(z, \tau_n) = e^{\tau} z + \cdots$$

lokal gleichmäßig in D existiert. Für $t \in E$ und $\tau_n > t$ ist $f(z, t) < f(z, \tau_n)$, nach Lemma 2 also $f(z, t) < f(z, \tau)$. Somit hat man $f(z, t)$ zu einer normierten Subordinationskette über $E \cup \{\tau\}$ erweitert.

c) Man kann also annehmen, daß $\tau \in E$ ist. Sei

$$K_1(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z, \tau)| \qquad (0 \leqq r < 1).$$

Aus $f(z, t) < f(z, \tau)$ folgt [7, S. 227] dann $|f(z, t)| \leqq K_1(r)$ für $t \in E$, $|z| \leqq r$. Daher ist

$$|f'(z, t)| \leqq K_2(r) = r^{-1/2}(1 - \sqrt{r})^{-2} K_1(\sqrt{r}).$$

Da $|\varphi(z, s, t)| \leqq |z|$ ist, ergibt sich für $|z| \leqq r$

$$(2.8) \qquad |f(z, t) - f(\varphi, t)| = \left| \int_{\varphi}^{z} f'(\zeta, t)\, d\zeta \right| \leqq |z - \varphi(z, s, t)|\, K_2(r).$$

Da

$$e^t - e^s = e^s(e^{t-s} - 1) \leqq e^s(t - s)\, e^{t-s} = (t - s)\, e^t$$

ist, erhält man aus (2. 5) nach (2. 6), (2. 7) und (2. 8)

$$\left| \frac{f(z, t) - f(z, s)}{t - s} \right| \leqq \frac{e^t - e^s}{(t - s)(e^t + e^s)} \cdot 2r \, \frac{1 + r}{1 - r} \, K_2(r) \leqq K(r).$$

§ 3. Die Struktur von Subordinationsketten

3. 1. Es soll nun der Zusammenhang zwischen normierten Subordinationsketten und den Mengen, über denen sie definiert sind, untersucht werden.

Satz 2. *Jede normierte Subordinationskette über E kann man eindeutig zu einer normierten Subordinationskette über der abgeschlossenen Hülle von E erweitern.*

In § 6 (Folgerung 7) wird gezeigt werden, daß man zu jeder abgeschlossenen Menge E mit $\inf E = -\infty$, $\sup E < +\infty$ eine normierte Subordinationskette über E finden kann, die man auf keine größere Menge E^* mit $\sup E = \sup E^*$ erweitern kann.

Beweis. Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über E, und sei F die abgeschlossene Hülle von E. Sei $t_0 \in F$. Da $E \cap [t_0 - 1, t_0 + 1]$ beschränkt ist, gilt nach Satz 1 für $|z| \leqq r$ und $s, t \in E \cap [t_0 - 1, t_0 + 1]$

$$|f(z, t) - f(z, s)| \leqq K(r)\, |t - s|.$$

Also existiert

$$f(z, t_0) = \lim_{t \to t_0, t \in E} f(z, t)$$

lokal gleichmäßig in D. Damit ist $f(z, t)$ für alle $z \in D$, $t \in F$ definiert. Aus Lemma 2 folgt, daß $f(z, t)$ eine Subordinationskette auch über F ist, die offenbar normiert ist. Da E in F dicht liegt, ergibt sich durch Anwendung von Satz 1 auf einen beschränkten Abschnitt von F, daß die Erweiterung auf F eindeutig bestimmt ist.

3. 2. Wenn E abgeschlossen und $s, t \in E$ ist, so ist das Komplement $[s, t] \setminus E$ eine offene Menge, also leer oder die Vereinigung höchstens abzählbar vieler offener Inter-

valle. Es gibt also darin ein Intervall größter Länge. Die Länge dieses Intervalls heißt die größte Lücke von $E \cap [s, t]$. Wenn das Komplement leer ist, also $[s, t] \subset E$ ist, so wird die größte Lücke als 0 definiert.

Satz 3. *Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über der abgeschlossenen Menge E, und sei $s < t$, $s, t \in E$. Wenn $\lambda = \lambda(s, t)$ die größte Lücke von $E \cap [s, t]$ ist, so ist die Funktion $\varphi(z, s, t)$ (Lemma 1) schlicht in $\{|z| < \varrho\}$ mit*

$$\varrho = 1/(e^{\lambda} + \sqrt{e^{2\lambda} - 1}),$$

und man kann ϱ durch keine größere nur von λ abhängige Zahl ersetzen. Wenn insbesondere $[s, t] \subset E$ ist, so ist $\varphi(z, s, t)$ schlicht in $\{|z| < 1\}$.

Beweis. Sei $0 < r < \varrho$. Angenommen, $\varphi(z, s, t)$ sei nicht schlicht in $\{|z| < r\}$. Man betrachte die Funktionen $\varphi(z, \sigma, t)$ für $\sigma \in E \cap [s, t]$. Sei

$$T = \{\tau \in E \cap [s, t]\colon \varphi(z, \tau, t) \text{ ist schlicht in } \{|z| < r\}\}.$$

Wegen $\varphi(z, t, t) \equiv z$ ist $t \in T$, andererseits nach Annahme $s \notin T$. Es gehört $\tau_0 = \inf T$ zu T. Sei (σ_0, τ_0) die in τ_0 endende Lücke von E bzw. $\sigma_0 = \tau_0$, wenn keine solche Lücke existiert. Dann gibt es eine Folge (σ_n) mit $\sigma_n \to \sigma_0$, $\sigma_n \in E \cap [s, \tau_0)$, so daß $\varphi(z, \sigma_n, t)$ in $\{|z| < r\}$ nicht-schlicht ist. Die Funktion

$$\varphi(z, \sigma_n, \tau_0) = e^{\sigma_n - \tau_0} z + \cdots$$

ist in $\{|z| < \varrho_n\}$ schlicht [7, S. 171], wobei

$$\varrho_n = 1/(e^{\tau_0 - \sigma_n} + \sqrt{e^{2(\tau_0 - \sigma_n)} - 1})$$

gesetzt ist. Da $0 \leqq \tau_0 - \sigma_0 \leqq \lambda$ ist, gilt $\varrho_n > r$ für genügend großes n. Wegen $|\varphi(z, \sigma_n, \tau_0)| \leqq |z| < r$ für $|z| < r$ folgt aus

$$\varphi(z, \sigma_n, t) = \varphi(\varphi(z, \sigma_n, \tau_0), \tau_0, t),$$

daß $\varphi(z, \sigma_n, t)$ in $\{|z| < r\}$ schlicht ist. Das ergibt einen Widerspruch. Also ist $\varphi(z, s, t)$ in $\{|z| < r\}$ für jedes $r < \varrho$ schlicht, also auch in $\{|z| < \varrho\}$.

Die normierte Subordinationskette über $\{-\lambda, 0\}$, die durch $f(z, 0) = z$ und $f(z, -\lambda) = z(e^{-\lambda} + z)/(1 + e^{-\lambda} z)$ gegeben ist, zeigt, daß man ϱ nicht durch eine größere Zahl ersetzen kann.

3. 3. In der Definition der Subordinationskette kann man statt $\{|z| < 1\}$ ein beliebiges Gebiet G mit mindestens drei Randpunkten nehmen, das etwa den Punkt 0 enthält. Wenn $f(z)$ und $g(z)$ in G analytische Funktionen sind, so schreibt man $f(z) \prec g(z)$, wenn es eine in G analytische Funktion $\varphi(z)$ mit Werten wieder in G und mit $\varphi(0) = 0$ gibt, so daß $f(z) = g(\varphi(z))$ ist. Man sagt, daß die in $z \in G$ analytische Funktion $f(z, t) = e^t z + \cdots$ eine normierte Subordinationskette über E bez. G bildet, wenn $f(z, s) \prec f(z, t)$ für $s \leqq t$, $s, t \in E$ gilt.

Sei nun G nicht einfach-zusammenhängend, und sei $s < t$. Aus dem Starrheitssatz von Aumann und Carathéodory [1] folgt dann, daß

$$e^{s-t} = |\varphi'(0, s, t)| \leqq e^{-\lambda}$$

für ein festes $\lambda = \lambda(G) > 0$ ist. Also ist E notwendig diskret, und λ ist eine untere Schranke für den Abstand zweier Punkte aus E. Bei normierten Subordinationsketten bezüglich mehrfach-zusammenhängender Gebiete können also durchaus nicht alle reellen Mengen E vorkommen. Wenn der Rand von G nur aus endlich vielen Punkten besteht, so existieren sogar nur die trivialen Subordinationsketten, bei denen E nur aus einem einzigen Punkt besteht [1, S. 761].

§ 4. Die Differentialgleichung

4. 1. Es soll nun der Fall untersucht werden, daß E ein Intervall ist. Dann kann man die normierten Subordinationsketten durch eine Differentialgleichung charakterisieren.

Satz 4. *Sei I ein Intervall, und sei $f(z, t) = e^t z + \cdots$ für jedes $t \in I$ in $D = \{|z| < 1\}$ analytisch. Genau dann ist $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über I, wenn $f(z, t)$ in $t \in I$ lokal absolut stetig ist, lokal gleichmäßig in D, und wenn es eine in $z \in D$ analytische, in $t \in I$ meßbare Funktion $h(z, t)$ mit $h(0, t) = 1$, $\operatorname{Re} h(z, t) > 0$ gibt, so daß für fast alle $t \in I$ gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z, t) = z h(z, t) f'(z, t). \tag{4. 1}$$

Bemerkungen. 1. Dieser Satz ist zum großen Teil in den Arbeiten von Löwner [6], Golusin [4], Kufarev [5], Robertson [9] und Bielecki und Lewandowski [3] enthalten.

2. Wenn $f(z, t)$ eine nicht-normierte Sudordinationskette mit absolut stetigem $f'(0, t)$ ist, die nach (1. 1) in die normierte Subordinationskette $f_*(z, t^*)$ transformiert wird, so gilt für die entsprechenden Funktionen in (4. 1)

$$h_*(z, t^*) = \frac{dt}{dt^*} \cdot \left(h(e^{-i\vartheta} z, t) - i \frac{d\vartheta}{dt}\right). \tag{4. 2}$$

Beweis. 1. Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über I. Nach Satz 1 ist $f(z, t)$ in $t \in I$ absolut stetig, und zwar gleichmäßig in $\{|z| \leqq r\}$ für jedes $r < 1$. Für festes $z \in D$ existiert also[2]) $\dot{f}(z, t)$ für fast alle $t \in I$. Sei t ein innerer Punkt von I, für den $\dot{f}(z, t)$ existiert. Sei $h(z, s, t)$ für $s < t$ wieder durch (2. 6) definiert. Dann ist $h(0, s, t) = 1$, $\operatorname{Re} h(z, s, t) > 0$, es gibt also eine Folge $s_n \nearrow t$, so daß

$$h(z, t) = \lim_{n \to \infty} h(z, s_n, t)$$

lokal gleichmäßig in D existiert, und es ist $h(0, t) = 1$, $\operatorname{Re} h(z, t) > 0$.

Wenn man Gleichung (2. 5) (mit $s = s_n$) durch $t - s_n$ dividiert und dann $n \to \infty$ streben läßt, so erhält man wegen $\varphi(z, s_n, t) \to z$

$$\dot{f}(z, t) = \lim_{s \to t} \frac{e^t - e^s}{(t - s)(e^t + e^s)} \cdot 2 z h(z, t) f'(z, t) = z h(z, t) f'(z, t).$$

2. Sei umgekehrt $f(z, t)$ eine Funktion, die den Bedingungen des Satzes genügt. Für $s \leqq t$, $s, t \in I$ sei $\varphi_0(z, s, t) = e^{s-t} z$ und

$$\varphi_{n+1}(z, s, t) = z \exp\left[-\int_s^t h(\varphi_n(z, s, \tau), \tau)\, d\tau\right].$$

Durch vollständige Induktion zeigt man, daß $\varphi_n(z, s, t)$ in D analytisch ist und $|\varphi_n(z, s, t)| \leqq |z|$ erfüllt. Aus (2. 7) ergibt sich in bekannter Weise die Konvergenz von $\varphi_n(z, s, t)$. Die Grenzfunktion $\varphi(z, s, t)$ gehört zu $\mathfrak{B}$ und erfüllt

$$\varphi(z, s, t) = z \exp\left[-\int_s^t h(\varphi(z, s, \tau), \tau)\, d\tau\right]. \tag{4. 3}$$

Hieraus folgt, daß $\varphi(z, s, t)$ in $t \in I$ absolut stetig ist, lokal gleichmäßig in D. Für festes z und s folgt durch partielle Differentiation für fast alle $t \in I$ mit $t \geqq s$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, s, t) = -\varphi(z, s, t)\, h(\varphi(z, s, t), t). \tag{4. 4}$$

[2]) Der Punkt bezeichne die Ableitung nach der zweiten (reellen) Variablen.

Für $s \leqq t$, $s, t \in I$ sei

$$f(z, s, t) = f(\varphi(z, s, t), t). \tag{4.5}$$

Dann ist $f(z, s, t)$ absolut stetig bezüglich t, wie sich aus der Voraussetzung ergibt. Für festes z und s ist nach (4. 1) und (4. 4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(z, s, t) &= f'(\varphi(z, s, t), t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, s, t) + \dot{f}(\varphi(z, s, t), t) \\ &= -\varphi h(\varphi, t) f'(\varphi, t) + \varphi h(\varphi, t) f'(\varphi, t) = 0.\end{aligned}$$

Aus der absoluten Stetigkeit folgt also

$$f(z, s, t) \equiv f(z, s, s) = f(z, s).$$

Nach (4. 5) ist daher $f(z, t)$ eine Subordinationskette über I. Damit ist Satz 4 bewiesen.

4. 2. Es sollen nun einige Beispiele für die Differentialgleichung (4. 1) behandelt werden.

1. Die analytische Funktion $f(z)$ heißt unter $g(z)$ schlicht subordiniert, wenn es eine in D schlichte Funktion $\psi \in \mathfrak{B}$ gibt, so daß $f(z) = g(\psi(z))$ ist.

Folgerung 1. *Seien $f(z, \alpha) = e^{\alpha} z + \cdots$ und $f(z, \beta) = e^{\beta} z + \cdots$ in D analytische Funktionen. Genau dann ist $f(z, \alpha)$ unter $f(z, \beta)$ schlicht subordiniert, wenn es eine normierte Subordinationskette $f(z, t)$ über $[\alpha, \beta]$ gibt, die für $t = \alpha, \beta$ mit den gegebenen Funktionen übereinstimmt.*

Beweis. Wenn $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über $[\alpha, \beta]$ ist, so ist $\varphi(z, \alpha, \beta)$ nach Satz 3 in D schlicht.

Umgekehrt gelte $f(z, \alpha) = f(\psi(z), \beta)$ mit einer in D schlichten Funktion $\psi \in \mathfrak{B}$. Zuerst soll angenommen werden, daß $\psi(z)$ noch in $|z| \leqq 1$ analytisch und schlicht ist und $|\psi(z)| < 1$ erfüllt. Wie Golusin [4] bewiesen hat, existiert dann eine normierte Subordinationskette $\psi(z, t)$ über $[\alpha - \beta, 0]$, so daß $\psi(z, \alpha - \beta) = \psi(z)$, $\psi(z, 0) = z$ ist, und es gilt die Löwnersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = z \frac{1 + \varkappa(t) z}{1 - \varkappa(t) z} \psi'(z, t) \qquad (|\varkappa(t)| = 1).$$

Daher erfüllt $f(z, t) = f(\psi(z, t), \beta)$ die Differentialgleichung

$$\dot{f}(z, t) = z \frac{1 + \varkappa(t) z}{1 - \varkappa(t) z} f'(z, t).$$

Nun sei $\psi(z)$ eine beliebige schlichte Funktion aus $\mathfrak{B}$. Dann erfüllt $r_n^{-1} \psi(r_n z)$ $(r_n \nearrow 1)$ die eben gemachten Voraussetzungen. Es gibt also normierte Subordinationsketten $f_n(z, t)$ mit $f_n(z, \alpha) = f(r_n^{-1} \psi(r_n z), \alpha)$, $f_n(z, \beta) = f(z, \beta)$. Aus Satz 7 (§ 6) folgt dann die Behauptung.

2. Eine in D analytische Funktion $f(z) = z + \cdots$ heißt sternförmig, wenn D durch $w = f(z)$ schlicht auf ein bez. 0 sternförmiges Gebiet abgebildet wird. Die folgende Aussage ist in etwas schwächerer Formulierung wohlbekannt (man vergleiche auch [9]).

Folgerung 2. *Eine in D analytische Funktion $f(z) = z + \cdots$ ist genau dann sternförmig, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Aussagen gilt:*

(a) *Für $|z| < 1$ ist*

$$\operatorname{Re}\,[z f'(z)/f(z)] > 0.$$

(b) *Durch $f(z, t) = e^t f(z)$ wird eine normierte Subordinationskette über $(-\infty, +\infty)$ gegeben.*

Beweis. Aus Satz 4 folgt sofort die Äquivalenz der Bedingungen (a) und (b). Wenn $f(z)$ sternförmig ist, so gilt offenbar $e^s f(z) \prec e^t f(z)$ für $s < t$, also (b).

Umgekehrt sei (a) erfüllt. Dann ergibt sich $f(z) \neq 0$ für $0 < |z| < 1$ und weiter

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \arg f(re^{i\vartheta}) = \operatorname{Re} h(re^{i\vartheta}) > 0.$$

Also ist $f(z)$ auf $\{|z| = r\}$ für jedes $r < 1$ schlicht, daher in ganz D. Aus (b) folgt, daß das Bildgebiet sternförmig ist.

3. *Beispiel einer nicht-differenzierbaren Subordinationskette.*

Sei $\gamma(t) = e^{-1}(1 - e^{t-1})(e^t - 1)$ und

$$f(z, t) = \frac{e^t z}{1 + \gamma(t - [t])\, z} = e^t z + \cdots \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Wenn t keine ganze Zahl ist, so hat

$$\frac{\dot f(z, t)}{z f'(z, t)} = 1 + e^{-1}(e^{2(t-[t])-1} - 1)\, z$$

in D positiven Realteil. Nach Satz 4 liefert also $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über $(-\infty, +\infty)$. Für $n = 0, \pm 1, \ldots$ ist

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z, t) \to \begin{cases} e^n(1 - e^{-1}(1 - e^{-1})\, z) & \text{für } t \to n + 0, \\ e^n(1 + (1 - e^{-1})\, z) & \text{für } t \to n - 0, \end{cases}$$

so daß $\dot f(z, n)$ nicht existiert, falls $z \neq 0$ ist.

4. 3. Es soll nun ein Schlichtheitskriterium bewiesen werden.

Folgerung 3. *Sei $0 < r \leqq 1$. Sei $f(z, t) = a_1(t)\, z + \cdots$ $(a_1(t) \neq 0)$ für jedes $t \in I = [0, \infty)$ in $\{|z| < r\}$ analytisch und weiter in $t \in I$ lokal absolut stetig, und zwar lokal gleichmäßig bez. $\{|z| < r\}$. Für fast alle $t \in I$ sei*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z, t) = z h(z, t)\, f'(z, t) \qquad (|z| < r), \tag{4. 6}$$

wobei $h(z, t)$ in $\{|z| < 1\}$ analytisch ist und positiven Realteil hat.

Wenn $|a_1(t)| \to \infty$ strebt für $t \to \infty$ und wenn die Funktionen $f(z,t)/a_1(t) = z + \cdots (t \in I)$ eine in $\{|z| < r\}$ normale Familie bilden, so kann man $f(z, t)$ für jedes $t \in I$ auf D analytisch fortsetzen und erhält eine in D schlichte Funktion.

Beweis. Man kann annehmen, daß $f(z, t)$ normiert ist, d. h. daß $f(z, t) = e^t z + \cdots$ ist. Wie im Beweis von Satz 4 konstruiert man zu $0 \leqq s \leqq t < \infty$ eine Funktion $\varphi(z, s, t)$ aus $\mathfrak{B}$, die (4. 3) erfüllt. Man zeigt wieder, daß $f(z, s) = f(\varphi(z, s, t), t)$ für $|z| < r$ ist. Entsprechend wie in Lemma 1 folgt hieraus $\varphi(z, s, t) = \varphi(\varphi(z, s, \sigma), \sigma, t)$ für $0 \leqq s \leqq \sigma \leqq t$ und $|z| < r$, also für $|z| < 1$. Für festes t ist daher $e^t \varphi(z, s, t)$ eine normierte Subordinationskette über $s \in [0, t]$. Da I ein Intervall ist, ergibt sich aus Satz 3, daß $\varphi(z, s, t)$ in D schlicht ist. Für festes $s \in I$ bilden die Funktionen $e^t \varphi(z, s, t) = e^s z + \cdots$ mit $t \in [s, \infty)$ daher eine in $\{|z| < 1\}$ normale Familie. Sei (t_n) so gewählt, daß

$$g(z, s) = \lim_{n \to \infty} e^{t_n} \varphi(z, s, t_n) \tag{4. 7}$$

in D lokal gleichmäßig existiert. Die Funktion $g(z, s)$ ist in D analytisch und schlicht. Es genügt daher zu zeigen, daß $f(z, s) = g(z, s)$ für $|z| < r$ ist.

Man kann annehmen, daß (t_n) so gewählt ist, daß

$$f_0(z) = \lim_{n\to\infty} e^{-t_n} f(z, t_n) = z + \cdots$$

in $\{|z| < r\}$ lokal gleichmäßig existiert. Für $|z| < r$ und $n \to \infty$ ist dann nach (4.7)

$$\begin{aligned} f(z, s) = f(\varphi(z, s, t_n), t_n) &\sim f(e^{-t_n} g(z, s), t_n) \\ &\sim e^{t_n} f_0(e^{-t_n} g(z, s)) \sim g(z, s). \end{aligned}$$

Als Anwendung soll das folgende Ergebnis von Bazilevič [2] bewiesen werden: *In $\{|z| < 1\}$ sei $g(z)$ sternförmig und $h(z)$ analytisch und von positivem Realteil. Wenn $\alpha > 0$ und β reell sind, so ist*

$$f(z) = \left[\int_0^z h(\zeta)\, g(\zeta)^\alpha \zeta^{i\beta - 1} d\zeta\right]^{1/(\alpha + i\beta)}$$

in $\{|z| < 1\}$ analytisch und schlicht.

Zum Beweise sei $h_0(z) = i\beta + \alpha z g'(z)/g(z)$. Dann ist auch $\operatorname{Re} h_0(z) > 0$. Für $0 \leqq t < \infty$ sei

$$f(z, t) = \left[\int_0^z (h(\zeta) + t h_0(\zeta))\, g(\zeta)^\alpha \zeta^{i\beta - 1} d\zeta\right]^{1/(\alpha + i\beta)}.$$

Dann ist

$$f(z, t) = \left(\frac{h(0)}{\alpha + i\beta} + t\right)^{1/(\alpha + i\beta)} (g'(0))^{\alpha/(\alpha + i\beta)}\, z + \cdots,$$

und man sieht leicht, daß für ein gewisses $r > 0$ die Funktion $f(z, t)$ für jedes $t \geqq 0$ in $\{|z| < r\}$ analytisch ist. Es gilt (4.6) mit

$$h(z, t) = h(z) + t h_0(z).$$

Da schließlich für $t \to +\infty$

$$\frac{f(z, t)}{a_1(t)} \to z \left(\frac{g(z)}{g'(0)\, z}\right)^{\alpha/(\alpha + i\beta)} = z + \cdots$$

strebt, ergibt sich aus Folgerung 3, daß $f(z, t)$ für jedes $t \geqq 0$ in $\{|z| < 1\}$ analytisch und schlicht ist.

§ 5. Das Verhalten für großes $|t|$

5.1. Definition 2. *Eine Subordinationskette $f(z, t)$ über E heißt normal, wenn sie normiert ist und wenn die Funktionen*

$$e^{-t} f(z, t) = z + \cdots \qquad (t \in E)$$

eine in D normale Familie bilden.

Wenn E beschränkt ist, so sind natürlich die Begriffe normal und normiert äquivalent.

Satz 5. *Sei E eine abgeschlossene Menge mit beschränkten Lücken*[3]*. Jede normierte Subordinationskette $f(z, t)$ über E kann man dann in der Form*

$$f(z, t) = \Phi(g(z, t)) \tag{5.1}$$

darstellen, wo $\Phi(w) = w + \cdots$ eine ganze Funktion und $g(z, t)$ eine normale Subordinationskette über E ist.

[3]) Das bedeutet, daß es eine Zahl λ gibt, so daß jede Lücke von E eine Länge $\leqq \lambda$ hat.

Umgekehrt ist natürlich jedes $f(z, t)$ der Form (5. 1) eine normierte Subordinationskette. Im Abschnitt 5. 4 wird gezeigt werden, daß man die Voraussetzung über die Beschränktheit der Lücken durch keine schwächere Forderung ersetzen kann. Zuerst soll ein Hilfssatz bewiesen werden.

Lemma 3. *Sei E eine abgeschlossene Menge mit beschränkten Lücken und $\beta = \sup E \leqq \infty$. Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über E. Es gebe ein $\varrho_0 > 0$, so daß*

$$\max_{|z| \leqq \varrho_0} |f(z, t)| \leqq e^t K_0 \qquad (t \in E) \tag{5. 2}$$

ist. Zu jedem $r < 1$ existieren dann nur von K_0, ϱ_0, E und r abhängende Zahlen $K(r)$ und $u(r)$, so daß

$$\max_{|z| \leqq r} |f(z, t)| \leqq e^t K(r) \tag{5. 3}$$

für alle $t \in E$ mit $t < \beta - u(r)$ ist.

Beweis. Die Lücken von E seien $\leqq \lambda$. Sei $r < 1$ gegeben. Sei $r_0 = r$, und sei r_ν definiert durch

$$r_{\nu+1} = r_\nu (r_\nu + e^{-\lambda})/(1 + e^{-\lambda} r_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{5. 4}$$

Dann gilt

$$r_\nu \leqq r[(r + e^{-\lambda})/(1 + e^{-\lambda} r)]^\nu.$$

Man kann daher ein $n = n(r)$ fest so wählen, daß $r_n \leqq \varrho_0$ ist.

Zu jedem $\tau \in E$ mit $\tau < \beta - 2\lambda$ existiert ein $\tau^* \in E$ mit $\tau + \lambda \leqq \tau^* \leqq \tau + 2\lambda$. Zu jedem $t \in E$ mit $t < \beta - 2n\lambda$ gibt es also Zahlen

$$t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

mit

$$\lambda \leqq t_{\nu+1} - t_\nu \leqq 2\lambda \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1). \tag{5. 5}$$

Es soll nun durch Induktion gezeigt werden, daß für $\nu = 0, 1, \ldots, n$

$$\max_{|z| \leqq r} |\varphi(z, t, t_\nu)| \leqq r_\nu \tag{5. 6}$$

ist. Für $\nu = 0$ ist (5. 6) trivial. Sei (5. 6) für ein $\nu < n$ bewiesen. Für jede Funktion $\psi \in \mathfrak{B}$ gilt

$$|\psi(z)| \leqq |z| \frac{|z| + |\psi'(0)|}{1 + |\psi'(0)|\,|z|}.$$

Für $|z| \leqq r$ ergibt sich daher aus (2. 3), (2. 1), (5. 5) und (5. 4)

$$\begin{aligned} |\varphi(z, t, t_{\nu+1})| &= |\varphi(\varphi(z, t, t_\nu), t_\nu, t_{\nu+1})| \\ &\leqq |\varphi(z, t, t_\nu)| \frac{|\varphi(z, t, t_\nu)| + e^{t_\nu - t_{\nu+1}}}{1 + e^{t_\nu - t_{\nu+1}}\,|\varphi(z, t, t_\nu)|} \\ &\leqq r_\nu \frac{r_\nu + e^{-\lambda}}{1 + r_\nu e^{-\lambda}} = r_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Damit ist (5. 6) für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ bewiesen.

Sei $t \in E$, $t < \beta - 2n\lambda$. Aus (5. 6) (mit $\nu = n$), (5. 2) und (5. 5) folgt

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leqq r} |f(z, t)| &= \max_{|z| \leqq r} |f(\varphi(z, t, t_n), t_n)| \\ &\leqq \max_{|\zeta| \leqq \varrho_0} |f(\zeta, t_n)| \leqq e^{t_n} K_0 \leqq e^t \cdot e^{2n\lambda} K_0. \end{aligned}$$

5. 2. *Beweis von Satz* 5.

1. Sei zuerst $\beta = \sup E < \infty$. Nach Satz 3 folgt aus der Voraussetzung über die Lücken, daß es ein $\varrho > 0$ gibt, so daß $\varphi(z, t, \beta)$ in $\{|z| < \varrho\}$ für alle $t \in E$ schlicht ist. Nach den Verzerrungssätzen gilt daher

$$|e^{-t}\varphi(z, t, \beta)| \leqq K_1 \qquad (|z| \leqq \varrho/2,\ t \in E)$$

für eine gewisse Konstante K_1. Daher ist für $|z| \leqq \varrho/2$ und $t \in E$

$$\begin{aligned} |e^{-t}f(z, t)| &= |e^{-t}f(\varphi(z, t, \beta), \beta)| \\ &\leqq |e^{-t}\varphi(z, t, \beta)| \max_{|\zeta| \leqq \varrho/2} |f'(z, \beta)| \leqq K_2. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 und Definition 2 ist daher $f(z, t)$ eine normale Subordinationskette über E. Damit ist Satz 5 mit $\Phi(w) \equiv w$ für den Fall $\sup E < \infty$ bewiesen.

2a. Sei nun $\beta = \sup E = \infty$. Nach Satz 3 gibt es ein $\varrho > 0$, so daß

$$\zeta = \varphi(z, s, t) = e^{s-t}z + \cdots$$

in $\{|z| < \varrho\}$ schlicht ist. Die Umkehrfunktion

$$z = \chi(\zeta; s, t) = e^{t-s}\zeta + \cdots$$

ist mindestens in $\{|\zeta| < 4^{-1}\varrho e^{s-t}\}$ analytisch und schlicht. Sei $m = 1, 2, \ldots$, und sei $s_m \in E$ mit $s_m \geqq \log(4m/\varrho)$ gewählt. Für $|w| < m$ und $t > s_m$ ist dann $e^{-t}|w| < 4^{-1}\varrho e^{s_m - t}$, also nach (2. 2)

$$f(e^{-t}w, t) = f(\chi(e^{-t}w; s_m, t), s_m) = w + \cdots. \tag{5. 7}$$

Da die Funktion

$$\chi(e^{-t}w; s_m, t) = e^{-s_m}w + \cdots$$

in $\{|w| < m\}$ schlicht ist, kann man eine Folge (t_n) mit $t_n \nearrow \infty$ auswählen, so daß $\chi(e^{-t_n}w; s_m, t_n)$ in $\{|w| < m\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, und zwar für jedes feste $m = 1, 2, \ldots$. Sei $\chi_m(w)$ die Grenzfunktion. Nach (5. 7) ist dann

$$f(e^{-t_n}w, t_n) \to f(\chi_m(w), s_m) = w + \cdots \qquad (|w| < m). \tag{5. 8}$$

Nach dem Identitätssatz hängt daher die rechte Seite nicht von m ab, stellt also eine ganze Funktion $\Phi(w) = w + \cdots$ dar.

2b. Sei $E_n = E \cap (-\infty, t_n]$. Dann ist

$$g_n(z, s) = e^{t_n}\varphi(z, s, t_n) = e^s z + \cdots \tag{5. 9}$$

eine normierte Subordinationskette über $s \in E_n$. Aus den Verzerrungssätzen folgt $|g_n(z, s)| \leqq e^s K_1$ für $|z| \leqq \varrho/2$. Nach Lemma 3 ergibt sich also

$$|g_n(z, s)| \leqq e^s K_2(r) \qquad (|z| \leqq r,\ s \in E_n). \tag{5. 10}$$

Man kann daher den später zu beweisenden Satz 7 auf $g_n(z, s)$ anwenden und also annehmen, daß (t_n) bereits so gewählt ist, daß $g_n(z, s)$ in D lokal gleichmäßig gegen eine normierte Subordinationskette $g(z, s)$ über E strebt. Aus (5. 9) folgt, daß für jedes $s \in E$ und $n \to \infty$

$$e^{t_n}\varphi(z, s, t_n) \to g(z, s) \tag{5. 11}$$

strebt lokal gleichmäßig in D. Nach (5. 10) ist

$$|e^{-s}g(z,s)| \leqq K_2(r) \qquad (|z| \leqq r,\ s \in E).$$

Die Subordinationskette $g(z, s)$ ist also normal.

Schließlich gilt für festes $s \in E$ nach (5. 11) und dem Ergebnis von Teil 2a

$$f(z,s) = \lim_{n\to\infty} f(e^{-t_n}\cdot e^{t_n}\varphi(z,s,t_n),\ t_n) = \Phi(g(z,s)).$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

5. 3. Es sollen nun einige Folgerungen bewiesen werden. Die erste ergibt sich unmittelbar aus Teil 1 des Beweises von Satz 5.

Folgerung 4. *Sei E eine abgeschlossene Menge mit* $\sup E < \infty$ *und beschränkten Lücken. Dann ist jede normierte Subordinationskette über E normal.*

Folgerung 5. *Sei E eine abgeschlossene Menge mit* $\inf E > -\infty$, $\sup E = +\infty$, *und beschränkten Lücken. Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über E, also*

$$f(z,t) = \Phi(g(z,t)),$$

wo $\Phi(w) = w + \cdots$ eine ganze Funktion und $g(z, t)$ eine normale Subordinationskette über E ist.

a) *Wenn $\Phi(w) = w + \cdots + c_m w^m$, $c_m \neq 0$ ist, so bilden die Funktionen*

$$e^{-mt}f(z,t) \qquad (t \in E)$$

eine normale Familie, und alle Grenzfunktionen beginnen mit $c_m z^m + \cdots$.

b) *Wenn $\Phi(w)$ transzendent ist und wenn es reelle Folgen (α_n) und (t_n) mit $t_n \to \infty$ gibt, so daß*

$$e^{-\alpha_n}f(z,t_n) \to f_0(z) \tag{5. 12}$$

lokal gleichmäßig in D strebt, so ist immer $f_0(z) \equiv 0$.

Beweis. a) Es ist

$$e^{-mt}f(z,t) - c_m(e^{-t}g(z,t))^m = e^{-t}c_{m-1}(e^{-t}g(z,t))^{m-1} + \cdots + e^{-(m-1)t}(e^{-t}g(z,t)).$$

Da die Funktionen $e^{-t}g(z,t) = z + \cdots$ $(t \in E)$ eine normale Familie bilden, strebt die rechte Seite gegen 0 für $t \to \infty$.

b) Sei

$$f(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\, z^k,\quad \Phi(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k.$$

Wegen $e^{-t}g(z,t) = z + \cdots$ folgt aus

$$f(z,t) = \Phi(g(z,t)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{kt}(e^{-t}g(z,t))^k,$$

daß für jedes $k = 1, 2, \ldots$

$$a_k(t) = e^{kt}(c_k + O(e^{-t})) \qquad (t \to \infty) \tag{5. 13}$$

ist. Wenn (5. 12) gilt, so ist $e^{-\alpha_n}a_k(t_n)$ für $n \to \infty$ beschränkt. Für jedes der unendlich vielen k, für die $c_k \neq 0$ ist, folgt dann aus (5. 13), daß $kt_n - \alpha_n$ nach oben beschränkt ist.

Also ist $jt_n - \alpha_n \to -\infty$ für $n \to \infty$ und jedes $j = 1, 2, \ldots$. Aus (5. 13) ergibt sich dann $e^{-\alpha_n} a_j(t_n) \to 0$ für $n \to \infty$, $j = 1, 2, \ldots$. Daher verschwinden alle Koeffizienten der Grenzfunktion $f_0(z)$, d. h. es ist $f_0(z) \equiv 0$.

Folgerung 6. *Sei $E = [\alpha, \infty)$. Genau dann ist die normierte Subordinationskette $f(z, t)$ normal, wenn für jedes $t \in E$ die Funktionen $f(z, t)$ in $\{|z| < 1\}$ schlicht sind.*

Beweis. 1. Wenn die Funktionen $e^{-t} f(z, t) = z + \cdots$ in $\{|z| < 1\}$ schlicht sind, so bilden sie nach den Verzerrungssätzen eine normale Familie.

2. Sei nun umgekehrt $f(z, t)$ eine normale Subordinationskette. Nach Folgerung 5 ist dann $f(z, t) = g(z, t)$. Nach Satz 3 ist $\varphi(z, s, t)$ für $\alpha \leqq s \leqq t < \infty$ schlicht in $\{|z| < 1\}$. Aus (5. 11) ergibt sich daher, daß $f(z, s)$ in $\{|z| < 1\}$ schlicht ist.

5. 4. Sei $\lambda_n > 0 (n = 1, 2, \ldots)$. Dann ist

$$\psi_n(z) = z(z + e^{-\lambda_n})/(1 + e^{-\lambda_n} z)$$

eine Funktion aus $\mathfrak{B}$. Sei $t_0 = 0$ und

$$t_n = -\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu.$$

Man definiere $f(z, t_0) = z$ und allgemein

$$f(z, t_{n+1}) = f(\psi_{n+1}(z), t_n).$$

Dann ist $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über $E = \{t_n : n = 0, 1, \ldots\}$. Wenn

$$f(z, t_n) = e^{t_n} z + b_n z^2 + \cdots$$

gesetzt wird, so folgt $b_n = e^{t_n}(e^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n}) + b_{n-1} e^{-2\lambda_n}$, d. h.

$$e^{-t_n} b_n = e^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n} + e^{-\lambda_n}(e^{-t_{n-1}} b_{n-1}).$$

Wenn nun $\limsup_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$ ist, so kann $e^{-t_n} b_n$ für $n \to \infty$ nicht beschränkt bleiben. Also ist $e^{-t_n} f(z, t_n)$ keine normale Folge. Damit ist gezeigt, daß man die Voraussetzungen von Satz 5 bzw. von Folgerung 4 über die Beschränktheit der Lücken durch keine schwächere Voraussetzung über das Wachstum der Lücken ersetzen kann.

5. 5. Satz 6. *Sei $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über E. Es gebe eine Folge von Zahlen $t_n \in E$ mit $t_n \nearrow \infty$, $t_{n+1} - t_n \to 0$, so daß*

$$e^{-t_n} f(z, t_n) \to f_0(z) \qquad (n \to \infty)$$

strebt lokal gleichmäßig in D. Dann ist $f_0(z) = z + \cdots$ sternförmig in D, und es gilt

$$e^{-t} f(z, t) \to f_0(z) \qquad (t \to \infty,\ t \in E).$$

Jede sternförmige Funktion $f_0(z) = z + \cdots$ kann als Grenzfunktion vorkommen. Die entsprechenden Behauptungen gelten für Konvergenz gegen $-\infty$.

Beweis. Sei $\delta > 0$ gegeben. Sei n_1 so groß gewählt, daß $t_{n+1} - t_n < \delta$ für $n > n_1$ ist. Wenn schon n_ν bestimmt ist, so werde $n_{\nu+1}$ so groß gewählt, daß

$$t_{n_{\nu+1}} \leqq t_\nu + \delta < t_{n_{\nu+1}+1}$$

ist. Dann gilt

$$t_{n_{\nu+1}} - t_{n_\nu} \to \delta \qquad (\nu \to \infty). \tag{5.14}$$

Nun ist

$$e^{-t_{n_\nu}} f(z, t_{n_\nu}) = e^{t_{n_{\nu+1}} - t_{n_\nu}} \cdot e^{-t_{n_{\nu+1}}} f(\varphi(z, t_{n_\nu}, t_{n_{\nu+1}}), t_{n_{\nu+1}}). \tag{5.15}$$

Es gibt eine Folge (ν_k), so daß für eine gewisse Funktion $\varphi_0 \in \mathfrak{B}$

$$\varphi(z, t_{n_{\nu_k+1}}, t_{n_{\nu_k}}) \to \varphi_0(z)$$

lokal gleichmäßig in D strebt. Für $\nu = \nu_k \to \infty$ folgt dann aus (5. 14) und (5. 15)

$$f_0(z) = e^\delta f_0(\varphi_0(z)),$$

d. h. es ist $e^{-\delta} f_0(z) < f_0(z)$ für $\delta > 0$. Nach Folgerung 2 ist daher $f_0(z)$ sternförmig in D.

Sei nun $\tau_k \in E$, $\tau_k \nearrow \infty$. Dann gibt es m_k, so daß $t_{m_k-1} < \tau_k \leqq t_{m_k}$ ist. Es gilt $0 \leqq t_{m_k} - \tau_k < t_{m_k} - t_{m_k-1} \to 0$ für $k \to \infty$, also

$$\varphi(z, \tau_k, t_{m_k}) = e^{\tau_k - t_{m_k}} z + \cdots \to z.$$

Daher ist

$$e^{-\tau_k} f(z, \tau_k) = e^{t_{m_k} - \tau_k} \cdot e^{-t_{m_k}} f(\varphi(z, \tau_k, t_{m_k}), t_{m_k}) \to f_0(z).$$

Wenn weiter $f_0(z) = z + \cdots$ eine sternförmige Funktion ist, so ist $f(z, t) = e^t f_0(z)$ eine normierte Subordinationskette über $(-\infty, +\infty)$ (Folgerung 2). Die Behauptungen über Konvergenz $\to -\infty$ werden ganz entsprechend bewiesen.

§ 6. Folgen von Subordinationsketten

6. 1. Wenn E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ und E abgeschlossene Mengen sind, so bedeute $E_n \to E$, daß E identisch ist mit der Menge der Häufungspunkte von Folgen (t_n) mit $t_n \in E$.

Satz 7. *Seien E_n und E abgeschlossene Mengen und $E_n \to E$. Seien $f_n(z, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ normierte Subordinationsketten über E_n. Zu $0 < r < 1$ und $0 < \alpha < \infty$ gebe es eine Zahl $M(r, \alpha)$, so daß*

$$|f_n(z, t)| \leqq M(r, \alpha) \tag{6.1}$$

für $|z| \leqq r$, $t \in E_n \cap (-\infty, \alpha]$, $n = 1, 2, \ldots$ ist.

Dann existiert eine Folge (n_ν), so daß $f_{n_\nu}(z, t)$ in D lokal gleichmäßig gegen eine normierte Subordinationskette $f(z, t)$ über E strebt, d. h. zu $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ und $r < 1$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein ν_0, so daß

$$|f_{n_\nu}(z, t_{n_\nu}) - f(z, t)| < \varepsilon$$

ist für $|z| \leqq r$, $t_{n_\nu} \in E_{n_\nu}$, $t \in E \cap [-\alpha, \alpha]$, $|t_{n_\nu} - t| < \delta$ und $\nu > \nu_0$.

Beweis. Sei $A = \{\tau_k : k = 1, 2, \ldots\}$ eine in E dichte abzählbare Menge. Wegen $E_n \to E$ gibt es zu jedem $k = 1, 2, \ldots$ Punkte $\tau_{nk} \in E_n$ mit $\tau_{nk} \to \tau_k$ für $n \to \infty$ und festes k. Wegen (6. 1) kann man eine Folge (n_ν) finden, so daß

$$f(z, \tau_k) = \lim_{\nu \to \infty} f_{n_\nu}(z, \tau_{n_\nu k}) = e^{\tau_k} z + \cdots$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots$ lokal gleichmäßig in D existiert. Aus Lemma 2 folgt dann, daß $f(z, t)$ eine normierte Subordinationskette über A bildet, die man nach Satz 2 zu einer normierten Subordinationskette über E erweitern kann.

Aus (6. 1) ergibt sich wie im Beweis von Satz 1, daß

$$|f_n(z, s') - f_n(z, s)| \leqq M_1(r, \alpha)\,|s' - s| \tag{6. 2}$$

ist für $|z| \leqq r$ und $s, s' \in E \cap [-2\alpha, 2\alpha]$. Es folgt

$$|f(z, s') - f(z, s)| \leqq M_1(r, \alpha)\,|s' - s|. \tag{6. 3}$$

Sei

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{6\,M_1(r, \alpha)}, \frac{\alpha}{3}\right).$$

Man kann ein m finden, so daß jede Zahl $t \in E \cap [-\alpha, \alpha]$ von einer Zahl τ_k mit $1 \leqq k = k(t) \leqq m$ einen Abstand $< \delta$ hat. Sei nun ν_0 so groß gewählt, daß für $k = 1, \ldots, m$ und $\nu > \nu_0$ erstens

$$|f_{n_\nu}(z, \tau_{n_\nu k}) - f(z, \tau_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (|z| \leqq r) \tag{6. 4}$$

und zweitens $|\tau_{n_\nu k} - \tau_k| < \delta$ ist.

Sei $|z| \leqq r$ und $t \in E \cap [-\alpha, \alpha]$, $t_{n_\nu} \in E_{n_\nu}$ $|t - t_{n_\nu}| < \delta$, $\nu > \nu_0$. Mit $k = k(t)$ ist dann $|\tau_k - t| < \delta$, $|\tau_{n_\nu k} - t_{n_\nu}| < 3\delta$, also $\tau_k, \tau_{n_\nu k} \in [-2\alpha, 2\alpha]$. Aus (6. 2), (6. 3) und (6. 4) folgt daher

$$\begin{aligned} |f_{n_\nu}(z, t_{n_\nu}) - f(z, t)| &\leqq M_1(r, \alpha)\,(|t_{n_\nu} - \tau_{n_\nu k}| + |t - \tau_k|) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< M_1(r, \alpha)\,(3\delta + \delta) + \frac{\varepsilon}{3} \leqq \varepsilon. \end{aligned}$$

6. 2. Folgerung 7. *Sei E eine reelle abgeschlossene Punktmenge mit* $\inf E = -\infty$ *und* $\beta = \sup E < +\infty$. *Dann gibt es eine normierte Subordinationskette über E, die man nicht zu einer normierten Subordinationskette über einer Menge $E^* \neq E$ mit $E < E^* < (-\infty, \beta]$ erweitern kann.*

Beweis. Die Bausteine, aus denen die Subordinationskette zusammengesetzt wird, sind die Funktionen

$$\varphi(z; \lambda) = z\,\frac{z + e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda} z} = e^{-\lambda} z + \cdots \qquad (\lambda > 0)$$

aus $\mathfrak{B}$. Zu jedem $n = 1, 2, \ldots$ wähle man eine diskrete Teilmenge $E_n = \{t_{nk} : k = 0, 1, \ldots\}$ von E, so daß jeder Punkt aus E von E_n einen Abstand $< 1/n$ hat, und es sei $t_{n0} = \beta \in E_n$. Die Punkte t_{nk} $(k = 0, 1, \ldots)$ aus E_n seien so angeordnet, daß $t_{nk} > t_{n,k+1}$ ist. Für $n \to \infty$ gilt dann $E_n \to E$.

Sei $n = 1, 2, \ldots$. Man setze $f_n(z, t_{n0}) = e^\beta z$ und allgemein

$$f_n(z, t_{n,k+1}) = f_n(\varphi(z, t_{n,k+1} - t_{nk}), t_{nk}). \tag{6. 5}$$

Dadurch wird eine normierte Subordinationskette über E_n definiert. Wegen $|f_n(z, t)| < e^\beta$ und $E_n \to E$ kann man nach Satz 7 eine Teilfolge $f_{n_\nu}(z, t)$ finden, die lokal gleichmäßig gegen eine normierte Subordinationskette $f(z, t)$ über E konvergiert.

Angenommen, man könnte $f(z, t)$ zu einer normierten Subordinationskette über der Menge $E^* \neq E$ mit $E < E^* < (-\infty, \beta]$ erweitern. Es sei $s \in E^* \setminus E$. Dann gehört s zu einem der offenen Intervalle (σ, τ), aus denen die offene Menge $(-\infty, \beta] \setminus E$ sich zusammensetzt. Sei $n > 1/(\tau - \sigma)$ und sei t_{nk} der zu τ nächste Punkt von E_n. Dann ist $|t_{nk} - \tau| < 1/n$, $|t_{n,k+1} - \sigma| < 1/n$. Aus (6. 5) (mit $n = n_\nu$) folgt dann

$$f(z, \sigma) = f(\psi(z; \tau - \sigma), \tau),$$

d. h. es ist $\varphi(z, \sigma, \tau) = \psi(z; \tau - \sigma)$. Nach Annahme ist $\sigma < s < \tau$, also $\gamma = \max(\tau - s, s - \sigma) < \tau - \sigma$. Nach Satz 3 wäre also $\psi(z; \tau - \sigma)$ schlicht in

$$\{|z| < 1/(e^\gamma + \sqrt{e^{2\gamma} - 1})\},$$

im Widerspruch dazu, daß $\psi'(z, \tau - \sigma)$ in dieser Kreisscheibe eine Nullstelle hat.

Literatur

1. *G. Aumann* und *C. Carathéodory*, Ein Satz über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete, Math. Ann. **109** (1934), 756—763.
2. *I. E. Bazilevič*, Über einen Fall der Integrierbarkeit in der Quadratur der Gleichung von Löwner-Kufarev, Mat. sb. **37** (1955), 471—476 [russisch].
3. *A. Bielecki* et *Z. Lewandowski*, Sur les familles de fonctions a-étoilées, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A **15** (1961), 45—55.
4. *G. M. Golusin*, Zur Theorie der schlichten Funktionen, Mat. sb. **6** (1939), 383—388 [russisch, deutsche Zusammenfassung].
5. *P. P. Kufarev*, Über einparametrige Familien analytischer Funktionen, Mat. sb. **13** (1943), 87—118 [russisch, englische Zusammenfassung].
6. *K. Löwner*, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann. **89** (1923), 103—121.
7. *Z. Nehari*, Conformal mapping, New York 1952.
8. *Ch. Pommerenke*, On sequences of subordinate functions, Michigan Math. J. **7** (1960), 181—185.
9. *M. S. Robertson*, Applications of the subordination principle to univalent functions, Pacific J. Math. **11** (1961), 315—324.

Eingegangen 13. August 1964

Rank 3 subgroups of finite symplectic and unitary groups[1]

By *D. G. Higman* and *J. E. McLaughlin* at Ann Arbor (Mich.)

1. Introduction

Denote by $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ the group of all those collineations of the projective space $\boldsymbol{P}$ of dimension d over the field $\boldsymbol{F}_q$, which commute with a given polarity δ of symplectic (i. e., null) or unitary type. The subgroup $T(\boldsymbol{P}) = T_\delta(\boldsymbol{P})$ generated by all the elations in $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, called the *projective special symplectic group* or the *projective special unitary group* according as δ is of symplectic or unitary type, is a simple group in all but six cases (see for example [1, 2]). In the unitary case q must be a square, $q = q_0^2$; it will prove convenient to put $q_0 = q$ in the symplectic case.

The *rank* of a transitive permutation group is defined to be the number of orbits for the stabilizer of a point [4]. Thus the rank is always at least 2, and rank 2 means double transitivity. The group $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ can be regarded as a group of permutations of the set of absolute points of $\boldsymbol{P}$ (a point P is called absolute if it lies on $P^\perp = \delta(P)$), and as such is transitive since $T(\boldsymbol{P})$ is transitive. For $d = 1$ or 2, $T(\boldsymbol{P})$ is even doubly transitive (of course for $d = 2$, as for all even d, only the unitary case is possible). It is shown in § 8 that for $d = 2$, any subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ which is doubly transitive on the absolute points of $\boldsymbol{P}$ must contain $T(\boldsymbol{P})$. For $d \geqq 3$ it is clear that $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ must have rank at least 3, since the stabilizer of a point P also stabilizes $P^\perp$. The fact is that $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ has exactly rank 3 for $d \geqq 3$, as does $T(\boldsymbol{P})$. The problem arises of determining the rank 3 subgroups of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, $d \geqq 3$.

Assuming that $q_0 > 4$, we show in § 9 that any normal subgroup $\neq 1$ of a rank 3 subgroup G of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ again has rank 3. (We don't know if the restriction on q_0 can be removed entirely, but if we assume that G consists of projectivities, we need only assume that $q_0 > 3$.) It follows with this restriction on q_0 that, firstly, minimal rank 3 subgroups of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ are simple, and secondly, if G is a rank 3 subgroup, so is $G \cap T(\boldsymbol{P})$. The main question therefore, is whether $T(\boldsymbol{P})$ is a minimal rank 3 subgroup. In § 10 is is shown that for $3 \leqq d \leqq 7$, $T(\boldsymbol{P})$ is minimal with the following possible exceptions in the symplectic case:

$$d = 3,\ q_0 = 2, \text{ and } d = 5 \text{ or } 7,\ q_0 \text{ even.}$$

The only case which we know to be actually exceptional is the symplectic case with $d = 3$, $q_0 = 2$, where the alternating group of degree 6 acts as a rank 3 subgroup of $T(\boldsymbol{P})$ while $T(\boldsymbol{P})$ is isomorphic to the symmetric group of degree 6. The symplectic case with $d = 5$, $q_0 = 2$ can, in fact be ruled out, but we do not give the rather lengthy details here. These results can be considered as symplectic and unitary analogues of

[1]) Research was supported in part by grants from the National Science Foundation.

Wagner's results [9] concerning doubly transitive subgroups of the full collineation group of $\boldsymbol{P}$.

Crucial for our present purposes, and of independent interest, are two results concerning generation of the symplectic and unitary groups. In §§ 4 to 6 it is shown that any set of elations in $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, $d \geqq 2$, containing at least one elation for each absolute center, generates $T(\boldsymbol{P})$. In § 7 it is shown that a subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, $d \geqq 2$, containing at least one $(K, K^\perp)$-homology for each non-degenerate linear variety K of some fixed dimension $e < d$, must contain $T(\boldsymbol{P})$. (A $(K, K^\perp)$-homology is defined to be a collineation $\neq 1$ fixing K and $K^\perp$ pointwise.) These results include symplectic and unitary versions of results known for the linear case [9, 3].

2. The symplectic and unitary groups

The notations and terminology introduced in this section will be used throughout the rest of the paper. The books [1] and [2] are basic references concerning the groups in question.

The projective space $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_d(q)$ over the field $\boldsymbol{F}_q$ ($q = p^r$, p prime) can be represented by a vector space V of dimension $n = d + 1$ over $\boldsymbol{F}_q$, in the sense that the linear varieties in $\boldsymbol{P}$ can be put in one-to-one correspondence with the subspaces $\neq 0$ of V in such a way that incidence in $\boldsymbol{P}$ corresponds to inclusion in V. It will occasionally be convenient to denote by $\overline{U}$ the linear variety in $\boldsymbol{P}$ corresponding to the subspace U of V. A linear variety in $\boldsymbol{P}$ can be regarded as a projective space, and, as such, is represented by the corresponding subspace of V.

The natural homomorphism P of the group $\mathrm{Aut}(V)$ of all non-singular semi-linear transformations of V into the group $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ of all collineations of $\boldsymbol{P}$ is surjective (by the Fundamental Theorem of Projective Geometry for $d \geqq 2$; this can be taken as the definition of $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P})$ for $d = 1$). The kernel of P is the group of scalar transformations. The *elations* of $\boldsymbol{P}$ are the collineations which can be induced by *transvections* of V, i. e., by transformations of the form

$$\tau\colon x \to x + \varphi(x)\, c, \quad x \in V$$

where φ is a non-trivial linear functional on V and c is a non-zero vector in V such that $\varphi(c) = 0$. The group generated by all elations of $\boldsymbol{P}$ we denote by $SL(\boldsymbol{P})$, and the group generated by all transvections of V we denote by $SL(V)$, so that $SL(\boldsymbol{P}) = PSL(V)$.

The elations of $\boldsymbol{P}$ are characterized as the collineations which fix all the points of some hyperplane, but no further points (for $d = 1$ this means exactly one fixed point). The hyperplane of fixed points of an elation γ is called the axis of γ. γ has the dual property that it fixes all the hyperplanes through some point, called the *center* of γ, which must, of course, be on the axis. An elation with center P and axis H we shall call a *(P, H)-elation*.

A collineation $\neq 1$ of P fixing a hyperplane H point-wise, but which is not an elation, fixes exactly one point, say P, off H, and is called an *homology* with *axis* H and *center* P, or a *(P, H)-homology*. The group $GL(\boldsymbol{P})$ generated by the elations and homologies together is called the group of *projectivities* of $\boldsymbol{P}$. The inverse image $GL(V)$ of $GL(\boldsymbol{P})$ in $\mathrm{Aut}(V)$ is the group of non-singular linear transformations of V.

We shall assume throughout that there is given a polarity δ of $\boldsymbol{P}$ of symplectic or unitary type, and denote by $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ the group of all collineations of $\boldsymbol{P}$ which commute with δ. The subgroup generated by all elations commuting with δ we denote by

$T_\delta(\boldsymbol{P})$, or simply by $T(\boldsymbol{P})$. To say that a linear variety K of $\boldsymbol{P}$ is non-degenerate means precisely that $\delta \mid K$ is a polarity of K. The notation $T(K)$ means always $T_{\delta \mid K}(K)$.

The assumption that δ is of symplectic or unitary type means that δ can be represented by a non-degenerate skew-hermitian form $g\colon V \times V \to \boldsymbol{F}_q$ which is alternate in case the corresponding automorphism σ of $\boldsymbol{F}_q$ is the identity. This means that for each subspace $U \neq 0$ of V, $\delta(\bar{U}) = \overline{W}$, where $W = \{x \in V \mid g(x, U) = 0\}$. We let $\boldsymbol{F}_{q_0}$ be the fixed field of σ. If δ is symplectic, then $\sigma = 1$ and $q = q_0$, while if δ is unitary, $q = q_0^2$ and σ is the involution $\sigma\colon x \to x^{q_0}$. The *absolute* points P of $\boldsymbol{P}$, i. e., those such that P lies on $P^\perp = \delta(P)$, are the points represented by the non-zero isotropic vectors of g. The points which are not absolute are called *ordinary*.

A semi-linear transformation T of V induces a collineation commuting with δ if and only if there is an element $\lambda_T \neq 0$ in $\boldsymbol{F}_q$ such that $g(T(x), T(y)) = \lambda_T g(x, y)^{\sigma_T}$ for all x, y in V, where σ_T is the automorphism of $\boldsymbol{F}_q$ determined by T. That is, the inverse image of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ in $\mathrm{Aut}(V)$ is the group $\mathrm{Aut}_g(V)$ of all semi-linear transformations of V satisfying this condition. The transvections τ of V belonging to $\mathrm{Aut}_g(V)$ are isometries ($\lambda_\tau = 1$), and are the transvections such that $\Phi(x) = \alpha \cdot g(x, c)$, $x \in V$, with α a fixed non-zero element of $\boldsymbol{F}_{q_0}$ and c a fixed non-zero isotropic vector. From this we can see that an elation in $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ must be a $(P, P^\perp)$-elation for some absolute point P, and that a given $(P, P^\perp)$-elation belongs to $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ if and only if it permutes the absolute points on a line through P not in $P^\perp$. The inverse image of $T_\delta(\boldsymbol{P})$ in $SL(V)$ is the group $T_g(V)$ generated by all the transvections of the above form. We also denote this group, which is the group of isometries of g of determinant 1, simply by $T(V)$.

The vector space V has a basis $\{e_{-m}, \ldots, e_{-1}, e_1, \ldots, e_m\}$ or $\{e_{-m}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_m\}$, according as $n = 2m$ or $n = 2m + 1$, such that

$$g(e_{-i}, e_i) = 1 = -g(e_i, e_{-i}) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

and

$$g(e_0, e_0) = \varkappa, \ \varkappa^\sigma + \varkappa = 0,$$

with all other products zero.

The matrix $J = J_n$ of g with respect to such a basis is given by

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_m \\ -\Omega_m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad J_{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_m \\ 0 & \varkappa & 0 \\ -\Omega_m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where Ω_m is the $m \times m$-matrix of the form

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

An $n \times n$-matrix A with coefficients in $\boldsymbol{F}_q$ represents an element of $T_g(V)$ with respect to the given basis if and only if A has determinant 1 and $A\,J\,A^{\sigma t} = J$, where $A^{\sigma t}$ is the transpose of the matrix obtained from A by applying σ to each entry. Thus, for

example, the inverse image in $T(V)$ of the subgroup $T(\boldsymbol{P})_P$ of $T(\boldsymbol{P})$ fixing the point $p = \overline{\langle e_{-m} \rangle}$ consists precisely of the transformations of V represented by matrices

$$M(a, A, \xi, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \eta & A & 0 \\ c & \xi & a^{-\sigma} \end{pmatrix}$$

where $\eta = -aAJ_{n-2}\xi^{\sigma t}$, $AJ_{n-2}A^{\sigma t} = J_{n-2}$, $\det A = a^{\sigma}/a$, and $\xi J_{n-2}\xi^{\sigma t} = (c/a)^{\sigma} - c/a$.

The matrices of this form in which $a = 1$ and $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ represents a member of a p-Sylow subgroup of $T(W)$, $W = \langle e_{-(n-1)}, \ldots, e_{n-1} \rangle$, represent the linear transformations of a p-Sylow subgroup of $T(V)$, which is also a p-Sylow subgroup of the full group of isometries of g, and induces isomorphically a p-Sylow subgroup of $T(\boldsymbol{P})$.

In the notation of Dieudonné [2], $T_g(V)$ is the group $Sp_n(\boldsymbol{F}_q)$ in the symplectic case, and the group $U_n^+(\boldsymbol{F}_q)$ in the unitary case, and $T_\delta(\boldsymbol{P}) = PSp_n(\boldsymbol{F}_q)$, $PU_n^+(\boldsymbol{F}_q)$ in the respective cases. All but six of the groups $T_\delta(\boldsymbol{P})$ are simple (see for example [1, 2]).

If $d = 1$, i. e., if $\boldsymbol{P}$ is a line l, then the absolute points are represented by the non-zero vectors in $\boldsymbol{F}_{q_0} e_{-1} + \boldsymbol{F}_{q_0} e_1$, and hence may be regarded as the points of a projective line l_0 over $\boldsymbol{F}_{q_0}$. Moreover, restricting $T_\delta(l)$ to the absolute points of l gives an isomorphism $T_\delta(l) \approx SL(l_0)$.

Remark on Notation. If G is a group of collineation of $\boldsymbol{P}$, and X is a linear variety in $\boldsymbol{P}$, then G_X denotes the subgroup of G fixing X while $G_{\{X\}}$ denotes the subgroup of G fixing every point of X. $G_{X,Y,\ldots}$ denotes $G_X \cap G_Y \cap \cdots$.

3. Some geometric considerations

A pair P, Q of distinct absolute points is called *singular* if P lies on $Q^\perp$, and *hyperbolic* otherwise. A line containing a hyperbolic pair of absolute points is called a *hyperbolic line*. The hyperbolic lines are precisely the non-degenerate lines of $\boldsymbol{P}$. A line containing a singular pair will be called *totally singular*. Every point on a totally singular line is absolute and every pair of distinct points on it is singular.

Denote by v_d the number of absolute points of $\boldsymbol{P}$. If $\boldsymbol{P}$ is symplectic (we say that $\boldsymbol{P}$ is symplectic or unitary according as δ is of symplectic or unitary type), all points are absolute, and $v_d = (q^{d+1} - 1)/(q - 1)$. Suppose that $\boldsymbol{P}$ is unitary. If $d = 1$, $\boldsymbol{P}$ is a hyperbolic line and we have $v_1 = q_0 + 1$. Assume that $d \geqq 2$, and let P be an absolute point of $\boldsymbol{P}$. The hyperbolic lines through P are precisely the q^{d-1} lines through P not in $P^\perp$. Any hyperplane K of $P^\perp$ not through P is non-degenerate as the polar of one of these hyperbolic lines (if $d = 2$, K is an ordinary point). The totally singular lines through P are precisely the v_{d-2} (0 if $d = 2$) lines joining P to absolute points of K. Hence

$$v_2 = q_0^3 + 1,$$

and

$$v_d = q^{d-1} q_0 + v_{d-2} q + 1, \; d \geqq 3.$$

It follows that

$$v_d = (q_0^{d+1} - (-1)^{d+1})(q_0^d - (-1)^d)/(q - 1), \qquad d \geqq 1.$$

The following table, which is convenient for later purposes, is now easily completed. We put $v_{-1} = v_0 = 0$, so that the entries are correct for all $d \geqq 1$. P denotes an absolute point.

Number of	*Symplectic*	*Unitary*
absolute points	$v_d = \dfrac{q^{d+1}-1}{q-1}$	$v_d = \dfrac{(q_0^{d+1}-(-1)^{d+1})(q_0^d-(-1)^d)}{q-1}$
absolute points $\neq P$ on $P^\perp$	$q v_{d-2}$	
absolute points not on $P^\perp$	q^d	q_0^{2d-1}
hyperbolic lines through P	q^{d-1}	
hyperbolic lines	$\dfrac{q^{d-1} v_d}{q_0+1}$	$q_0 = \begin{cases} q \text{ if } \boldsymbol{P} \text{ is symplectic} \\ \sqrt{q} \text{ if } \boldsymbol{P} \text{ is unitary} \end{cases}$
hyperbolic lines in $P^\perp$	$\dfrac{q^{d-1} v_{d-2}}{q_0+1}$	
totally singular lines through P	v_{d-2}	
hyperbolic pairs of absolute points	$q_0^{2d-1} v_d$	$q^d v_d$
singular pairs of absolute points	$q v_d v_{d-2}$	

4. Groups generated by elations

The purpose of the next three sections is to prove

Theorem 1. *Let δ be a polarity of symplectic or unitary type of the projective space $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_d(q)$ of dimension $d \geqq 2$ over $\boldsymbol{F}_q$. Then a set of elations in* $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ *containing a $(P, P^\perp)$-elation for each absolute point P generates $T_\delta(\boldsymbol{P})$.*

In the present section the case $d = 2$ is treated, in the next section the case $d = 3$ is established, and finally in § 6 the induction step from d to $d + 2$ is demonstrated. Of course the theorem is trivial for q_0 a prime.

It would be extremely interesting to move the condition that $\boldsymbol{P}$ be desarguesian from the hypothesis to the conclusion in this theorem for the case $d = 2$, that is, to show that a finite projective plane π admitting a polarity δ of "unitary type" and a $(P, P^\perp)$-elation for each absolute point P is necessarily desarguesian. The right definition of "unitary type" might be that a line containing two absolute points contains $n_0 + 1$, where the order of π is n_0^2. It would still be very interesting to prove this under the assumption that π admits all possible $(P, P^\perp)$-elations.

In the proof of the cases $d = 2$ and 3 of Theorem 1 we shall make essential use of the following fact about desarguesian projective lines, easily derived from the discussion in Dickson's book [1, Chapter XII].

Lemma 1. *Let X be a group of collineations of a desarguesian projective line l of order q, such that for each point P on l, X contains an element fixing P and no other point* (i. e., *an elation with center P*). *Then $X \geqq SL(l)$ unless*

1) *q is even and X is a dihedral group of order $2(q+1)$. Here X is a Frobenius group on the points of l and contains exactly one elation for each center, or*

2) *$q = 9$ and the elations in X generate a group isomorphic to the alternating group of degree 5. Here X contains exactly two elations for each center.*

This lemma may be regarded as the case $d = 1$ of Theorem 1. Unfortunately, the many exceptions make it impossible to begin the induction with this case.

Proof of the Theorem for $d = 2$. We are given a unitary polarity δ of $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2(q_0^2)$, and a subgroup G of $T_\delta(\boldsymbol{P})$ containing at least one $(P, P^\perp)$-elation in $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ for each absolute point P in $\boldsymbol{P}$. It is required to prove that $G = T_\delta(\boldsymbol{P})$. We may assume that q_0 is not a prime.

Let l_0 be the set of $q_0 + 1$ absolute points of a hyperbolic line l of $\boldsymbol{P}$. Then $G_l \mid l_0$ contains an element of order p fixing P for each point P of l_0, and hence is transitive on the points of l_0. It follows that G is transitive on the absolute points of $\boldsymbol{P}$, and hence that the number e of $(P, P^\perp)$-elations is independent of P. We may regard l_0 as a line over $\boldsymbol{F}_{q_0}$ and $G_l \mid l_0$ as a group of collineations on this line, and conclude from Lemma 1 that $e = q_0 - 1$ and that $G = T_\delta(\boldsymbol{P})$, with the following two exceptions:

(1) *q_0 is even and $G_l \mid l_0$ is the dihedral group of order $2(q_0+1)$ for every hyperbolic line. Here $e = 1$,* or

(2) *$q_0 = 9$ and $e = 2$.*

We discuss these exceptional cases separately.

Case (1). Here we have q_0 even and > 2, and $e = 1$. We see that $G_l \mid l_0$ is a Frobenius group for any hyperbolic line l. Suppose we can show that G is a Frobenius group on the absolute points of $\boldsymbol{P}$. Then the Frobenius kernel M of G will be an abelian group (since elations are involutions for q even) of order $q_0^3 + 1$, and since $q_0 > 2$, $q_0^2 - q_0 + 1$ contains a primary factor u^a which is also the u-contribution to $|GL(\boldsymbol{P})|$ and divides $q^2 + q + 1$. Hence a u-Sylow subgroup of M is a normal subgroup of G, and has for its normalizer in $GL(\boldsymbol{P})$ the normalizer of a Singer group. Since the normalizer of a Singer group has odd order [5], this is a contradiction. So it suffices to show that G is a Frobenius group on the absolute points of $\boldsymbol{P}$.

Suppose that P and Q are two absolute points such that $G_{P,Q} \neq 1$ and let l be the hyperbolic line $P + Q$. Since $G_l \mid l_0$ is a Frobenius group, $G_{P,Q}$ fixes every absolute point of l, and hence fixes every point of l. That is, if G is not a Frobenius group then $G_{\{l\}} \neq 1$ for some hyperbolic line l.

Clearly $G_{\{l\}} \neq 1$ implies that G contains an $(l, l^\perp)$-homology, say τ. Let m be a hyperbolic line through $l^\perp$ and let R be an absolute point on m. If φ is the $(R, R^\perp)$-elation in G then φ and τ are in G_m and $\varphi\tau\varphi(X) = \tau^{-1}(X)$ for every absolute point X on m, because of the assumed structure of $G_m \mid m_0$. If $G_{\{m\}} = 1$, then $\varphi\tau\varphi = \tau^{-1}$, and this implies that $\varphi(l) = l$. But this is impossible since φ is an elation with center R not on l. Thus $G_{\{l\}} \neq 1$ implies $G_{\{m\}} \neq 1$ for each hyperbolic line m through $l^\perp$. Let m be a hyper-

bolic line through $l^\perp$ and let Q be an ordinary point on m. Then $Q < m$ implies $m^\perp < Q^\perp$, and we have $G_{\{l\}} \neq 1$ implies $G_{\{m\}} \neq 1$, whence $G_{\{Q^\perp\}} \neq 1$ and $G_{\{k\}} \neq 1$ for every hyperbolic line k through Q. Now suppose that v is a hyperbolic line of $\boldsymbol{P}$ not through $l^\perp$. There are exactly $q_0 + 1$ absolute points on v, and hence v intersects at least one of the hyperbolic lines through $l^\perp$ in an ordinary point ($q_0^2 - q_0 > q_0 + 1$ since $q_0 > 2$). Thus $G_{\{l\}} \neq 1$ implies $G_{\{v\}} \neq 1$ for all hyperbolic lines v of $\boldsymbol{P}$.

Let P be an absolute point of $\boldsymbol{P}$, and let S_P be a 2-Sylow subgroup of G contained in G_P. We have $G_P = S_P C$, where C is a cyclic group, for the stabilizer of an absolute points in $T_\delta(\boldsymbol{P})$ has a normal 2-Sylow subgroup having a complement isomorphic with the multiplicative group of $\boldsymbol{F}_q$, and a normal Sylow subgroup has complements. Furthermore all complements of S_P in G_P are conjugate and any element not in S_P is contained in some complement. If G is not Frobenius then from the above there will be a homology τ in G_P and we may suppose $\tau \in C$ (it is in some conjugate of C). Let l be the axis of τ; since C is abelian we have P, l and $l^\perp$ fixed by C. Suppose m is another hyperbolic line and C contains an $(m, m^\perp)$-homology. Then $l^\perp < m$, $P < m$ imply $m = l^\perp + P$. But $P < l$ so $l^\perp < P^\perp$ and then $m = P^\perp$, a contradiction.

Thus we have a one-to-one correspondence between the hyperbolic lines through P and the complements of S_P in G_P, and we deduce that S_P is transitive on the hyperbolic lines through P. If l is a hyperbolic line through P we have $|S_{P,l}| = 2$ so $|SP| = 2q_0^2$. On the other hand, S_P is a group of exponent dividing 4 (the 2-Sylow subgroup of $SL(\boldsymbol{P})$ has exponent 4) and contains just one involution. Hence $|S_P| \leqq 8$, i. e., $2q_0^2 \leqq 8$ or $q_0 = 2$, a contradiction. This disposes of the case (1).

Case (2). In this case $q_0 = 9$ and $e = 2$. Let S_P be a 3-Sylow subgroup of G_P, $P = \langle e_{-1} \rangle$, then S_P is isomorphic to its inverse image in $T(V)$, which, consists of transformations represented by matrices of the form

$$M(\alpha, c) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \alpha^* & 1 & \\ c & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha^* = -\varkappa\alpha^\sigma)$$

with respect to a suitable basis. The group of matrices $M(\alpha, c)$ arising in this way we denote by $\mathfrak{G}$. The homomorphism $M(\alpha, c) \to \alpha$ of $\mathfrak{G}$ into $\boldsymbol{F}_{81}$ has kernel L of order 3. The image W of this homomorphism we regard as an $\boldsymbol{F}_3$-subspace of $\boldsymbol{F}_{81}$. Now

$$(M(\alpha, a), M(\beta, b)) = M(0, \alpha^*\beta - \beta^*\alpha)$$

so $\varphi(\alpha, \beta) = M(0, \alpha^*\beta - \beta^*\alpha)$ defines an alternate bilinear mapping $\varphi: W \times W \to L$. If φ is degenerate, there is an $\alpha \neq 0$ such that $\alpha^*\beta - \beta^*\alpha = 0$ for all β. Then $\beta/\alpha \in \boldsymbol{F}_9$ and $|W| \leqq 9$. If Φ is non-degenerate, then $|W| = 3^{2k}$, $k = 0, 1$, or 2. But $k = 2$ implies that S_P has index 3 in the 3-Sylow subgroup of $T(\boldsymbol{P})$, giving too many elations in G. Hence $|W| \leqq 9$ in all cases.

Now let D be the subgroup of all diagonal matrices

$$D(x) = \begin{pmatrix} x & & \\ & x^\sigma/x & \\ & & 1/x^\sigma \end{pmatrix}$$

representing transformations in the inverse image of G_P in $T(V)$. From $D(x)M(\alpha, a)D(x^{-1}) = M(\alpha x/x^{2\sigma}, a/xx^{\sigma})$ it follows first that $xx^{\sigma} = \pm 1$, so that $|D|$ divides 20, and second, that for each $\alpha \in W$, α/x^3 is also in W. If $|D| > 4$, there exists $D(x) \neq 1$ in D with $x^5 = 1$. If there is an $\alpha \neq 0$ in W, the 27 distinct F_3-linear combinations of α/x^3, α/x, α/x^4 all lie in W, contradicting $|W| \leqq 9$. Hence $W \neq 0$ implies that $|D|$ divides 4, and we see that $|G|$ divides either $3 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 73 = 600 \cdot 73$ or $3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 73 = 1080 \cdot 73$. It follows that a 73-Sylow subgroup of G must be normal, since none of the numbers $73k + 1$, $k = 1, 2, \ldots$, divides 600 or 1080.

Now the 73-Sylow subgroup of G must be a subgroup of a Singer group in $GL(P)$, and its normalizer must be contained in the normalizer N of the Singer group, whence $G \leqq N$. But $|N| = 3(81^2 + 81 + 1) = 3 \cdot 91 \cdot 73$ from which it follows that $|G| = 3 \cdot 73$, contrary to the transitivity of G on the $9^3 + 1$ absolute points.

5. Proof of Theorem 1 in the case $d = 3$

The following simple lemma about projective planes will be needed.

Lemma 2. *Let l be a line in a finite desarguesian projective plane π, and let P be a point on l. Let X be a group of elations of π with axis l, such that for each point $Q \neq P$ on l, X contains the same number $h > 0$ of (Q, l)-elations. Then X contains all (P, l)-elations.*

Proof. Let the order of π be $q = p^r$, p prime. We have $h = p^s - 1$ with $1 \leqq s \leqq r$, and hence $|X| = q(p^s - 1) + p^t$, where $p^t - 1$ is the number of (P, l)-elations in X, $0 \leqq t \leqq r$. On the other hand, X is regular on the q^2 points of π off l, so each X-orbit of such points has length $|X|$, and hence $|X| = p^{\alpha}$. If R is a point off l, each of the q lines $R + Q$, Q on l, $Q \neq P$, contains at least $p - 1$ members $\neq R$ of the X-orbit containing R. Hence $|X| \geqq q(p - 1) + 1 > q$, so $\alpha > r$. We have

$$p^{\alpha} = q(p^s - 1) + p^t.$$

Dividing by $q = p^r$ gives

$$p^{\alpha - r} = p^s - 1 + p^{t - r}$$

and hence $t = r$.

We remark that it can happen that $h < q - 1$.

If we drop the assumption that π be desarguesian we still have that X is an elementary abelian p-group for some prime p, and essentially the same argument as above shows that X contains $p^r - 1 \geqq h$ (P, l)-elations, where p^r is the exact power of p dividing the order n of π.

Also, we need here (and again later in § 9) a further fact about desarguesian projective lines which follows easily from Dickson's discussion of the groups on the projective line [1, Chapter XII]. Namely

Lemma 3. *A group X of collineations of a desarguesian projective line l of order q, which is doubly transitive on the points of l, contains $SL(l)$ unless $q = 4$. If $X \leqq GL(l)$ then $X \geqq SL(l)$ without exception.*

Now we proceed with the proof of Theorem 1 for the case $d = 3$. We assume that G is a group generated by elations in $\mathrm{Aut}_{\delta}(\boldsymbol{P})$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_3(q)$, at least one for each absolute center. It is required to prove that $G = T_{\delta}(\boldsymbol{P})$, i. e., that G contains all $(P, P^{\perp})$-elations in $\mathrm{Aut}_{\delta}(\boldsymbol{P})$ for every absolute point P.

Let P be an absolute point and let l be a hyperbolic line in $P^\perp$. Then $G_{P,l,\{l^\perp\}}$ is transitive on the absolute points of l. To see this, let Q be any absolute point of l and let φ be a $(Q, Q^\perp)$-elation in G. Then $\varphi \in G_{P,l,\{l^\perp\}}$ and φ induces a permutation of order p of the set l_0 of absolute points of l, with precisely the one fixed point Q; the desired transitivity property of $G_{P,l,\{l^\perp\}}$ follows. From this it follows that G_P is transitive on the absolute points $\neq P$ of $P^\perp$, for, if X, Y are distinct absolute points in $P^\perp$, $\neq P$, there exists an absolute point Z in $P^\perp$ such that $X + Z$ and $Y + Z$ are hyperbolic lines. This implies that G is transitive on the singular pairs of absolute points in $\boldsymbol{P}$.

Let Q be an absolute point $\neq P$ on $P^\perp$, then each point R on $m = P + Q$ is absolute and each $(R, R^\perp)$-elation of $\boldsymbol{P}$, $R \neq P$, induces an (R, m)-elation on $P^\perp$. Since, as we have seen above, $G_{P,m}$ is transitive on the points $\neq P$ of m, we may apply Lemma 2 to the group of elations of $P^\perp$ with axis m contained in $G_{P,m} \mid P^\perp$, with the result that $G_{P,m}$ induces all possible (P, m)-elations on $P^\perp$.

Now choose a basis $\{e_{-2}, e_{-1}, e_1, e_2\}$ of V with $P = \overline{\langle e_{-2}\rangle}$, and denote by $\mathfrak{G}$ the group of matrices representing with respect to this basis the transformations in the inverse image of G in $T_\delta(V)$. Taking $Q = \overline{\langle e_1\rangle}$ and $Q = \overline{\langle e_{-1}\rangle}$ in order we see that $\mathfrak{G}$ contains a matrix of the form

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -t^\sigma & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ u(t) & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

and one of the form

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ t^\sigma & 0 & 1 & \\ v(t) & t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for each $t \in \boldsymbol{F}_q (t^\sigma = t^{q_0})$. We have

$$(x(t), y(s)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ t^\sigma s + s^\sigma t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The elements $t^\sigma s + s^\sigma t$ exhaust the fixed field $\boldsymbol{F}_{q_0}$ of σ unless $\sigma = 1$ *and* q is even. With this exception, therefore, it has been shown that G contains all $(P, P^\perp)$-elations in $T_\delta(\boldsymbol{P})$.

Assume now that q is even, and that δ is of symplectic type so that every point is absolute. It will suffice to show that for some hyperbolic line l, $G_{\{l^\perp\}} \mid l \geqq SL(l)$. For then G will contain all $(P, P^\perp)$-elations for P on l, and G is transitive on the points. We assume therefore that this is false. Since G contains a $(P, P^\perp)$-elation for each P, it follows that for each point X on a given hyperbolic line l, $G_{\{l^\perp\}} \mid l$ contains an elation with center X. Hence by Lemma 1, $G_{\{l^\perp\}} \mid l \neq SL(l)$ implies that $G_{\{l^\perp\}} \mid l$ is a maximal subgroup of $SL(l)$ having order $2(q+1)$. But $G_{\{l^\perp\}} \cap G_{\{l\}} = 1$, i. e., $G_{\{l^\perp\}}$ is faithful on l, so $|G_{\{l^\perp\}}| = 2(q+1)$. Similarly $|G_{\{l\}}| = 2(q+1)$. Now $G_{\{l^\perp\}}$ is a normal subgroup of G_l and hence since $SL(l)$ is simple (q is not a prime) we must have $G_l \mid l = G_{\{l^\perp\}} \mid l$. Therefore $G_l : G_{\{l\}} = 2(q+1)$ so that $|G_l| = 4(q+1)^2$.

Now for each point P, G_P is transitive on the points $\neq P$ of $P^\perp$, and from this we have that

(1) G_m is doubly transitive on the points of m for each singular line m, and

(2) G_P has exactly two orbits in its action on the lines of $P^\perp$.

From (1) and Lemma 3 we have that $q-1$ divides $|G|$, and from (2) we have that G is transitive on the hyperbolic lines of $\boldsymbol{P}$. Thus $q-1$ divides $(q^2v_3/(q+1))\cdot 4(q+1)^2$, which is impossible.

6. Completion of the proof of Theorem 1

We now complete the proof of Theorem 1 by establishing the induction step. We assume that $d>3$ and that the result is already proved for dimension $d-2$. Given an absolute point P, let K be a non-degenerate linear variety of dimension $d-2$ such that $P<K$. For each absolute point X on K, each $(X, X^\perp)$-elation of $\boldsymbol{P}$ induces an $(X, X^\perp\cap K)$-elation of K. This means that if G is a group of collineations of $\boldsymbol{P}$ generated by elations in $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, at least one for each absolute center, then $G_{\{K^\perp\}}\mid K$ contains at least one elation in $\mathrm{Aut}_{\delta\mid K}(K)$ for each absolute center in K. Hence by the induction assumption, $G_{\{K^\perp\}}\mid K\geqq T(K)$. We see that the induction, and hence the proof of Theorem 1, will be complete when we have proved

Lemma 4. *Let K be a non-singular linear variety of dimension $e\geqq 1$ in $\boldsymbol{P}$ and let P be an absolute point on K. If G is a subgroup of $T_\delta(\boldsymbol{P})$ such that $G\mid K^\perp=1$ and $G\mid K$ is the group generated by all $(P, (P^\perp\cap K))$-elations of K then G contains all $(P, P^\perp)$-elations of $\boldsymbol{P}$.*

Proof. If S is a p-Sylow subgroup of G then, since $(p, |G_{\{K\}}|)=1$, $S\approx S\mid K=G\mid K$. It follows that the elements of S are $(P, P^\perp)$-elations and hence that G contains all the $(P, P^\perp)$-elations.

It would be interesting to known the collineation groups G of $\boldsymbol{P}$, $d>2$, which contain at least one elation with center P and one with axis H for each point P and each hyperplane H. It is just conceivable that G must contain $SL(\boldsymbol{P})$ when d is even and that G must contain $T_\delta(\boldsymbol{P})$, with δ a symplectic polarity of $\boldsymbol{P}$, when d is odd[2]). It is known that $G\geqq SL(\boldsymbol{P})$ for $d=2$ [8], and that this conclusion holds for all $d\geqq 2$ if the hypothesis is strengthened to the assumption that G contains a (P, H)-elation for each incident point-hyperplane pair (P, H) [9, 3].

7. Groups generated by homologies

We make a slight extension of the usual notion of homology. Let H and K be complementary linear varieties in $\boldsymbol{P}$. If τ is a collineation of $\boldsymbol{P}$ with $\tau\neq 1$ but $\tau\mid H=1$ and $\tau\mid K=1$, we say that τ is an (H, K)-*homology* of $\boldsymbol{P}$. The usual homologies are the (H, K)-homologies for which one of H and K is a point. It is easy to see that if $d\geqq 2$ then any fixed point of τ must be either on H or K.

Theorem 2. *Choose e with $0\leqq e<d$ and suppose G is a subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ such that for each non-degenerate linear variety K of dimension e, G contains a $(K, K^\perp)$-homology. Then $G\geqq T_\delta(\boldsymbol{P})$.*

Proof. When δ is symplectic our hypothesis can hold only when q is odd and then there is exactly one $(K, K^\perp)$-homology for each K. The conclusion follows from the simplicity of $T_\delta(\boldsymbol{P})$.

[2]) There are, in fact, exceptions: such a group can fix a linear subvariety. Excluding these, a stronger result can be proved.

For δ unitary we proceed by induction on d. When $d = 2$ the hypothesis is that G contains a $(Q, Q^\perp)$-homology for each ordinary point Q. If $G \not\geqq T_\delta(\boldsymbol{P})$ then by Theorem 1 there is an absolute point P such that G contains no $(P, P^\perp)$-elation. Let H be the subgroup of G generated by all $(Q, Q^\perp)$-homologies, where Q is an ordinary point on $P^\perp$. Certainly $H \leqq G_P$. If $\eta \in H$ and η fixes the q ordinary points on $P^\perp$, then η fixes all the points on $P^\perp$ and by our assumption on P, $\eta = 1$. Thus H is faithful in its action on the ordinary points of $P^\perp$. If Q, R are distinct ordinary points on $P^\perp$ then $H_Q \neq 1$ but $H_Q \cap H_R = 1$, for otherwise we would have $\eta \in H$ fixing three points on $P^\perp$ and consequently all points on $P^\perp$. (H is generated by perspectivities.) Thus H is a Frobenius group on the ordinary points of $P^\perp$ and there will be a normal subgroup S of H with $|S| = q$. Now S is a subgroup of the p-Sylow subgroup of G_P and hence S is isomorphic with a group of matrices of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \alpha^* & 1 & \\ \theta(\alpha) & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha^* = -\varkappa\alpha^\sigma).$$

Since $\theta(\alpha + \beta) = \theta(\alpha) + \alpha\beta^* + \theta(\beta)$, $\alpha\beta^* = \beta\alpha^*$ or $\alpha\beta^\sigma = \beta\alpha^\sigma$; that is, $\alpha\beta^\sigma \in \boldsymbol{F}_{q_0}$. But then we are lead to $q = q_0^2 = |S| \leqq q_0$. This contradiction shows that G contains a $(P, P^\perp)$-elation for each absolute point P and hence that $G \geqq T_\delta(\boldsymbol{P})$.

Suppose now that $d > 2$. By symmetry we may assume that $e < d - 1$. Choose a non-degenerate hyperplane H and $K \leqq H$ with K non-degenerate of dimension e. Since $K \leqq H$, $H^\perp \leqq K^\perp$ and $G_{(K^\perp)} \leqq G_H$. Thus if τ is a $(K, K^\perp)$-homology then $\tau \mid H$ is a $(K, K^\perp \cap H)$-homology of H and by induction $G_{H^\perp} \mid H \geqq T(H)$. But then using Lemma 4 we see that $G \geqq T(\boldsymbol{P})$. (Every absolute point is on some non-degenerate hyperplane.)

8. Transitivity in the unitary plane

In the case of a unitary plane $\boldsymbol{P}$, $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ and its subgroup $T(\boldsymbol{P})$ are doubly transitive on the absolute points. Using the case $d = 2$ of Theorem 1 it is easy to see that any subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ which is doubly transitive on the absolute points necessarily contains $T(\boldsymbol{P})$. In fact it is only necessary to assume transitivity on certain flags in $\boldsymbol{P}$, namely

Theorem 3. *Let δ be a unitary polarity of the plane $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2(q_0^2)$. A subgroup G of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ transitive on the flags consisting of an absolute point P and a hyperbolic line l through P must contain $T(\boldsymbol{P})$.*

Proof. By Theorem 1 we need only show that G contains an elation in $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$. Assume that G contains no such elation. Then as in the proof of Theorem 2, a p-Sylow subgroup S of $G_P \cap T(\boldsymbol{P})$, P an absolute point, must have order $\leqq q_0$. On the other hand, the assumed transitivity of G implies that the number $q_0^2(q_0^3 + 1)$ of the flags in question divides $|G|$. It follows that q_0 divides $G : G \cap T(\boldsymbol{P}) = G\,T(\boldsymbol{P}) : T(\boldsymbol{P})$, and hence that q_0 divides $\mathrm{Aut}(V) : T(V) = 2r(q_0 - 1)$. Thus p^r divides $2r$ and we must have $p = 2$. It follows that $S = 1$, otherwise S contains an involution and then G contains an elation. Hence $2^{2r} \mid 2r$, which is impossible.

9. Rank 3 subgroups of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$

As we remarked in § 1, for $d \geqq 3$, $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ has rank 3 as a group of permutations of the absolute points of $\boldsymbol{P}$. That is, $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ is faithfully represented as a group of permutations of the absolute points of $\boldsymbol{P}$, and the stabilizer of an absolute point has precisely 3

orbits of absolute points; these are $\{P\}$, the absolute points on $P^{\perp}$, and the absolute points off $P^{\perp}$. Moreover, the subgroup $T_\delta(\boldsymbol{P})$ also has rank 3. To say that G is a rank 3 subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, $d \geqq 3$, is equivalent to saying that G is a group of collineations of $\boldsymbol{P}$ which

(1) permutes the singular pairs of absolute points transitively, and

(2) permutes the hyperbolic pairs of absolute points transitively.

We begin here to study the problem of determining the rank 3 subgroups of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$. Analoguous to Wagner's result [9] for doubly transitive collineation groups we prove

Theorem 4. *Let δ be a polarity of symplectic or unitary type of the projective space $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_d(q)$ of dimension $d \geqq 3$ over $\boldsymbol{F}_q$. A normal subgroup $N \neq 1$ of a rank 3 subgroup G of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$ again has rank 3, provided that $q_0 > 4$, where $q_0 = q$ or $\sqrt{q}$ according as δ is of symplectic or unitary type.*

We do not know if the restriction on q_0, needed for the proof, is actually necessary. It will be seen that *if we assume that $G \leqq GL(\boldsymbol{P})$, then $q_0 > 3$ suffices in Theorem 4.*

To facilitate the exposition we divide up the proof of Theorem 4 into a number of lemmas. It is assumed throughout that G is a rank 3 subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, $d \geqq 3$ and $q_0 > 4$. Frequent use is made of the table in § 3. It will be clear that several of the steps become simpler or can be omitted altogether if the symplectic case alone is considered. We begin by establishing some needed properties of G.

Lemma 5. *G is primitive on the set of absolute points of $\boldsymbol{P}$.*

Proof. This follows very easily from the fact that a system of imprimitivity would have to contain together with each of its points P either all absolute points on $P^{\perp}$ or all absolute points off $P^{\perp}$.

Lemma 6. *For each absolute point P, G_P is transitive on the hyperbolic lines in $P^{\perp}$.*

Proof. Let C be a G_P-orbit of hyperbolic lines in $P^{\perp}$ and let n be a member of C. Since G is a rank 3 subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$, it follows that G is transitive on the v_d absolute points and on the $q^{d-1}v_d/(q_0+1)$ hyperbolic lines of $\boldsymbol{P}$. Hence

$$G : G_P = v_d \text{ and } G : G_n = q^{d-1}v_d/(q_0+1).$$

Since $(q, v_d) = 1$ it follows that q^{d-1} divides $G_P : G_{P,n}$, i. e., that q^{d-1} divides $|C|$. Since G_P is transitive on the absolute points $\neq P$ of $P^{\perp}$, each of these qv_{d-2} points contains the same number of members of C, whence $qv_{d-2}/(q_0+1)$ divides $|C|$. It follows that $q^{d-1}v_{d-2}/(q_0+1)$ divides $|C|$, which gives the result since this is the total number of hyperbolic lines in $P^{\perp}$.

Lemma 7. *For each absolute point P and each hyperbolic line n in $P^{\perp}$, $G_n : G_{P,n} = v_{d-2}$ and $G_{P,n} \mid n \geqq T(n)$.*

Proof. By Lemma 6, $G_P : G_{P,n} = q^{d-1}v_{d-2}/(q_0+1)$ and hence $G_n : G_{P,n} = v_{d-2}$.

To show that $G_{P,n} \mid n \geqq T(n)$ it suffices by Lemma 3 to show that $G_{P,n}$ is doubly transitive on the absolute points of n. Here we use the assumption that $q_0 \neq 4$; if $G \leqq GL(\boldsymbol{P})$, no restriction on q_0 is needed at this point. Let Q, R be a hyperbolic pair of absolute points on n. The assumption that G is of rank 3 gives at once that $G_P : G_{P,Q} = qv_{d-2}$, $G_n : G_{n,Q} = q_0 + 1$ and $G_{n,Q} : G_{n,Q,R} = q_0$. Writing $x = G_{P,Q} : G_{P,n,Q}$ and $y = G_{P,n} : G_{P,n,Q}$ we have $xqv_{d-2} = yq^{d-1}v_{d-2}/(q_0+1)$, or $x(q_0+1) = yq^{d-2}$. Since $y \leqq q_0 + 1$, this gives $y = q_0 + 1$.

Now write $u = G_{P,n,Q} : G_{P,Q,R}$ and $z = G_{n,Q,R} : G_{P,Q,R}$, then $uyv_{d-2} = zq_0(q_0+1)$ or $uv_{d-2} = zq_0$. Since $u \leqq q_0$, we have $u = q_0$ and hence the desired double transitivity of $G_{P,n}$.

Lemma 8. *For each absolute point P, G_P is transitive on the ordinary points of $P^\perp$.*

Proof. For each hyperbolic line n in $P^\perp$, $G_{P,n}$ is transitive on the ordinary points of n by Lemma 7. Since every ordinary point of $P^\perp$ is on some hyperbolic line in $P^\perp$, the result follows by Lemma 6.

Now we assume given a normal subgroup $N \neq 1$ of G, and proceed to show that N has rank 3. Repeated use is made of the fact that the orbits of a normal subgroup of a transitive permutation group are of equal length. We also use the simplicity of $T(n)$ for hyperbolic lines n, which holds for $q_0 > 3$.

An immediate consequence of Lemma 5 is

Lemma 9. *N is transitive on the absolute points of P.*

Next we prove

Lemma 10. *If P is an absolute point and n a hyperbolic line in $P^\perp$, then $N_{P,n} \mid n \geqq T(n)$.*

Proof. Since G is transitive on the hyperbolic lines, the number of hyperbolic lines in an N-orbit divides the total number of hyperbolic lines, i. e., $N : N_l$ divides $q^{d-1}v_d/(q_0+1)$ for any hyperbolic line l. Since N is transitive on the absolute points, each absolute point contains the same number λ of hyperbolic lines of an N-orbit, hence $\lambda v_d = (q_0+1)(N:N_l)$. Hence λ divides q^{d-1}, so $\lambda = p^t$ for some t and $N : N_l = p^t v_d/(q_0+1)$.

To show that $N_l \mid l \geqq T(l)$ it suffices by Lemma 7 to show that $N_l \mid l \neq 1$. Suppose that $N_l \mid l = 1$ so that N_l fixes every absolute point of l. It follows that for any absolute point X on l, $N_X \geqq N_l$, and hence that $v_d = N : N_X$ divides $N : N_l$, which is impossible in view of the above formula for $N : N_l$.

By Lemma 7 again, we have only to show that $N_{P,n} \mid n \neq 1$, where P is an absolute point and n a hyperbolic line in $P^\perp$. Since $N : N_P = v_d$ and $N : N_n = p^t v_d/(q_0+1)$, we have that $N_P : N_{P,n} = p^t x$ and $N_n : N_{P,n} = (q_0+1)\,x$ for some x. Now $N_n : N_{P,n}$ divides $G_n : G_{P,n}$ since the G_n-orbit of absolute points containing P is a union of N_n-orbits of equal length. But by Lemma 7, $G_n : G_{P,n} = v_{d-2}$, so $x(q_0+1)$ divides v_{d-2} and therefore $(x, p) = 1$. Consequently p^t is the exact power of p dividing $N : N_{P,n}$.

If Q, R is a hyperbolic pair of absolute points on n, then $N_n : N_{Q,R} = q_0(q_0+1)$ since we have proved that $N_n \mid n \geqq T(n)$. Hence $q_0 p^t$ divides $N : N_{P,Q,R}$, and therefore q_0 divides $N_{P,n} : N_{P,Q,R}$, proving that $N_{P,n} \mid n \neq 1$. This completes the proof of Lemma 10.

Now it is easy to see that N is transitive on the singular pairs of absolute points, i. e.,

Lemma 11. *For each absolute point P, N_P is transitive on the absolute points $\neq P$ on $P^\perp$.*

Proof. If Q and R are absolute points $\neq P$ on $P^\perp$, there exists an absolute point T on $P^\perp$ such that $Q + T$ and $T + R$ are hyperbolic. The result therefore follows at once from Lemma 10.

In exactly the same way it is seen that Lemma 10 implies

Lemma 12. *For each absolute point P, N_P is transitive on the ordinary points on $P^\perp$.*

Now we can complete the proof of Theorem 4 by proving that N is transitive on the hyperbolic pairs of absolute points, i. e.,

Lemma 13. *For each absolute point P, N_P is transitive on the absolute points off $P^\perp$.*

Proof. By Lemma 10 it will suffice to prove that N_P is transitive on the hyperbolic lines through P. By Lemmas 11 and 12 there are exactly 2 or 3 N_P-orbits of points on $P^\perp$ according as $\boldsymbol{P}$ is symplectic or unitary, namely, one orbit consisting of P alone, one consisting of absolute points on $P^\perp$, and one, which is vacuous when $\boldsymbol{P}$ is symplectic, consisting of the ordinary points on $P^\perp$. Hence there are precisely 2 or 3 N_P-orbits of hyperplanes of $P^\perp$. One of these orbits consists of the non-degenerate hyperplanes of $P^\perp$, i. e., the hyperplanes $l^\perp$, where l is a hyperbolic line through P (the others are: the hyperplanes $m^\perp$ where m is a totally singular line through P, and the hyperplanes $X^\perp \cap P^\perp$ where X is an ordinary point on $P^\perp$). In particular, therefore, N_P is transitive on the non-degenerate hyperplanes of $P^\perp$, and hence on the hyperbolic lines through P.

10. Rank 3 subgroups of $T_\delta(\boldsymbol{P})$

We turn finally to the question of when $T_\delta(\boldsymbol{P})$ is a minimal rank 3 subgroup of $\mathrm{Aut}_\delta(\boldsymbol{P})$. The following theorem provides an answer in some special cases.

Theorem 5. *Let δ be a polarity of symplectic or unitary type of the projective space $\mathrm{P} = \boldsymbol{P}_d(q)$ over $\boldsymbol{F}_q$ and suppose $3 \leqq d \leqq 7$. If G is a rank 3 subgroup of $T_\delta(\boldsymbol{P})$ then $G = T_\delta(\boldsymbol{P})$ with the possible exception of δ symplectic and q even.*

Remarks. 1. The only case in which we actually know of a proper rank 3 subgroup of $T(\boldsymbol{P})$ is that of A_6 acting on $\boldsymbol{P}_3(2)$.

2. Although we will not give the details, the possible exception with δ symplectic, $d = 5$, $q = 2$ does not exist.

3. Mitchell [6] has determined the maximal subgroups of $T(\boldsymbol{P})$ when δ is symplectic, $d = 3$, and q is odd. An examination of his list of these subgroups provides an alternative proof of the theorem in this case.

4. In the proof of the theorem for the case $d = 7$ we will use the following:

Let $T_g(V)$ be as in § 2 with the dimension of $V = n \geqq 3$ and let $\Delta : T_g(V) \to V$ be a derivation. If $\sigma = 1$ and q is odd then Δ is inner. If $\sigma \neq 1$ then Δ is inner unless $q_0 = 2$ and $n = 4$.

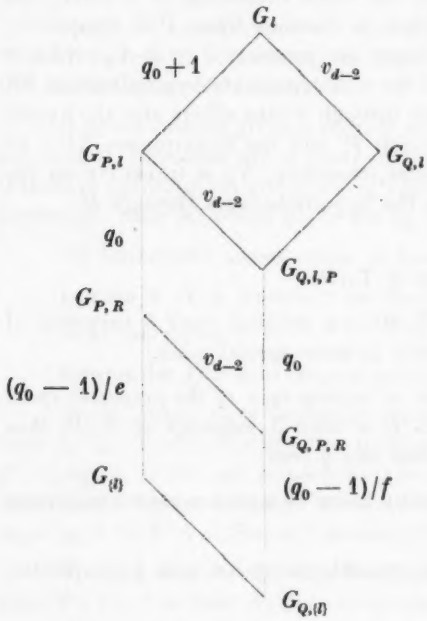
The proof is not given here because it is our intention to treat this together with certain analogous questions in another place.

Proof of Theorem 5. We suppose we are not in one of the exceptional situations and that G is properly contained in $T_\delta(\boldsymbol{P})$. Using Theorems 1 and 2 we conclude that G contains neither elations nor $(l, l^\perp)$-homologies for hyperbolic lines l. Thus $G_{\{P^\perp\}} = 1$ for each absolute point P and $G_{\{l\}} \cap G_{\{l^\perp\}} = 1$ for each hyperbolic line l.

Since $G_l \mid l_0 \geqq SL(l_0)$ there are just three possibilities for $X = G_{\{l^\perp\}} \mid l_0$: (1) $X \geqq SL(l_0)$, (2) X is sharply transitive on l_0, or (3) $X = 1$. Now (1) implies that G contains a $(P, P^\perp)$-elation for any absolute point P on l and (2) implies that $G_{\{l^\perp\}}$ is a characteristic subgroup of $T(\boldsymbol{P})_{\{l^\perp\}}$ and consequently that G contains a subgroup $\neq 1$ which is normal in $T_\delta(\boldsymbol{P})$. Since $T_\delta(\boldsymbol{P})$ is a simple group, we must have (3); that is, $G_{\{l^\perp\}} \leqq G_{\{l\}}$ and therefore $G_{\{l^\perp\}} = 1$.

Since the numbers of hyperbolic lines and totally singular lines through an absolute point are relatively prime we have, for each absolute point P on a hyperbolic line l, that $G_{P,l}$ is transitive on the totally singular lines through P. From this it follows

that $G_{P,l}$ is transitive on the absolute points of $l^{\perp}$. If Q is an absolute point on $l^{\perp}$ and R is a second absolute point on l, the above remark together with the double transitivity of G_l on l_0 yields the adjoining index diagram.



where e and f are 1 or 2 and $e \leqq f$.

Thus we have $G_{\{l\}} : G_{\{l\},Q} = v_{d-2}$ or $v_{d-2}/2$. In particular $G_{\{l\}} \neq 1$ and consequently, since $G_{\{l^{\perp}\}} = 1$ for all hyperbolic lines l, $d > 3$.

We note that since

$$G_P : G_{P,l} = q^{d-1},\ q_0 q^{d-1} \mid |G|.$$

Using the notation introduced in § 2, G_P is represented by a group $\mathfrak{G}_P$ of $(d+1)$-rowed matrices $M = M(a, A, \xi, c)$. We will take $l = \langle \overline{e_{-m}, e_m} \rangle$. Those members of $\mathfrak{G}_P$ with $a = 1$ and $A = 1$ form a normal subgroup U and since G is elation free the members of U must have the form $M(1, 1, \xi, Q(\xi))$. Thus we may identify U with a subgroup of K^{d-1} $(K = F_q)$ and the function Q must satisfy the identity $Q(\xi+\eta) = Q(\xi) + Q(\eta) - \xi J_{d-1} \eta^{\sigma t}$. Thus for all $\xi, \eta \in U$ we have $\xi J_{d-1} \eta^{\sigma t} = \eta J_{d-1} \xi^{\sigma t}$. On the other hand $J_{d-1} + J_{d-1}^{\sigma t} = 0$ and hence $|U| \leqq q^{(d-1)/2}$. (Recall that for $\sigma = 1$ we are supposing q is odd.) We remark that this bound for $|U|$ depends only on the assumptions that G is elation free and that q is odd if δ is symplectic.

Now we use the fact that $G_{P,l}$ is transitive on the absolute points of $l^{\perp}$. This tells us that the group of $(d-1)$-rowed matrices A which occur in the $M(a, A, \xi, c)$ of $\mathfrak{G}_P$ must be transitive on the lines $\langle \xi \rangle$ of K^{d-1} for which $\xi J_{d-1} \xi^{\sigma t} = 0$. On the other hand if $\xi \in U$ and A is such a matrix then $\xi A \in U$. Hence $U = 0$, or $U = 1$ as a subgroup of $\mathfrak{G}_P$.

Let $\mathfrak{A}$ be the full group of $(d-1)$-rowed matrices A for which $A J_{d-1} A^{\sigma t} = J_{d-1}$ and let $\mathfrak{A}'$ be the unimodular subgroup of $\mathfrak{A}$. We have the homomorphism $h: \mathfrak{G}_P \to \mathfrak{A}$ given by $h\, M(a, A, \xi, c) = A$. If $M = M(a, 1, \xi, c) \in \operatorname{Ker} h$ and $a \neq 1$, then M represents a collineation fixing pointwise the polar of some hyperbolic line, which is contrary to our assumptions. Thus $\operatorname{Ker} h = U = 1$, and consequently $q_0 q^{d-1} \leqq |\operatorname{Im}(h)|_p$. From the known order of the group $\mathfrak{A}$ we see that $q_0 q^{d-1} \leqq q_0^{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}$ in case $\sigma \neq 1$ and $q^d \leqq q^{\frac{(d-1)^2}{4}}$ in case $\sigma = 1$. These inequalities imply that $d \geqq 7$ so we now assume that $d = 7$. Suppose $\operatorname{Im}(h) \geqq \mathfrak{A}'$, then $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ will consist of matrices $M = M(a(A), A, \xi(A), c(A))$ where A ranges over $\mathfrak{A}'$. Since $\det A = 1$ we must have $a(A) = (a(A))^{\sigma}$ and hence $a(A) = 1$ when $q_0 = 2$. When $q_0 > 2$, $\mathfrak{A}'$ has only the trivial homomorphic image in K^* $(d-1 \geqq 3)$ and so in all cases $a(A) = 1$. But then $A \to \xi(A)$ is a derivation from $\mathfrak{A}'$ into K^*, i. e., $\xi(AB) = \xi(A)\, B + \xi(B)$; and it can be shown (see Remark 4 above) that in any of the cases confronting us here all such derivations are inner. The fact that ξ is inner contradicts our assumption that G is elation-free and therefore we may suppose that $\operatorname{Im}(h) \not\geqq \mathfrak{A}'$. Then using Theorem 1 again we may suppose that $\operatorname{Im}(h)$ contains no matrices representing transvections. Now applying the previously obtained bound on

$|U|$ to the group $\mathrm{Im}\,(h)$ we see that

$$|\,\mathrm{Im}\,(h)\,|_p \leqq q^2 S_4$$

where S_4 is the order of a p-Sylow subgroup of the group of 4-rowed matrices X for which $XJ_4X^{\alpha t} = J_4$. But $|\,G\,|_p = |\,G_P\,|_p = |\,\mathrm{Im}\,(h)\,|_p$ and consequently $q_0 q^6 \leqq q^2 S_4$. Using the known value of S_4 we contradict $d = 7$.

References

[1] *L. E. Dickson*, Linear groups, Leipzig 1901, reprinted by Dover Publications Inc. 1958.

[2] *J. Dieudonné*, La géometrie des groupes classiques, Berlin 1955.

[3] *D. G. Higman*, Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces, Ill. J. of Math. **6** (1962), 434—446.

[4] *D. G. Higman*, Finite permutation groups of rank 3, Math. Z. **86** (1964), 145—156.

[5] *D. G. Higman* and *J. E. McLaughlin*, Geometric *ABA*-groups, Ill. J. Math. **5** (1961), 382—397.

[6] *H. H. Mitchell*, The subgroups of the quatenary abelian linear group, TAMS **15** (1914), 379—396.

[7] *T. G. Ostrom* and *A. Wagner*, On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z. **71** (1959), 186—199.

[8] *A. Wagner*, On perspectivities of finite projective planes, Math. Z. **71** (1959), 113—123.

[9] *A. Wagner*, On collineation groups of projective spaces I., Math. Z. **76** (1961), 411—426.

Eingegangen 26. Juni 1964

Starke Approximation in algebraischen Gruppen. I

Von *Martin Kneser* in Göttingen[1])

1. Einleitung

Die folgenden Bezeichnungen gelten für die ganze Arbeit:

k ein algebraischer Zahlkörper,

$\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen aus k,

$A = A_k$ der Adelring von k ([24], Chap. I),

G eine über k definierte lineare algebraische Gruppe; wir wählen ein Koordinatensystem fest aus; die Koordinaten von Produkt und Inversen sind dann Polynome in den Ausgangskoordinaten mit gewissen Koeffizienten; ist R einer der vorkommenden Ringe, der alle diese Koeffizienten enthält, so sei

G_R die Gruppe der Elemente aus G mit Koordinaten in R, insbesondere

G_A die Adelgruppe zu G ([24], Chap. I) und

G_k die Gruppe der über k rationalen Elemente aus G, die wir mittels der Einbettung von k in A mit den Hauptadelen in G_A identifizieren;

v eine Stelle von k, d. h. eine Klasse äquivalenter nichttrivialer Bewertungen,

k_v die vollständige Hülle von k bezüglich v; ist v endlich, d. h. die zugehörige Bewertung nichtarchimedisch, so sei

$\mathfrak{o}_v$ der Ring der ganzen Elemente aus k_v,

$\mathfrak{p}_v$ das zugehörige Primideal;

S eine endliche Menge von Stellen von k;

$G_S = \prod_{v \in S} G_{k_v}$; die Elemente dieser Gruppe identifizieren wir mit denjenigen Adelen aus G_A, deren v-Komponenten 1 sind für $v \notin S$.

Ziel dieser Arbeit ist es, Bedingungen dafür aufzustellen, daß $G_k G_S$ in G_A dicht liegt. Anders ausgedrückt: Ist $a \in G_A$ und U eine Umgebung von a, so soll stets

$$G_k \cap U G_S \neq \emptyset \tag{1.1}$$

sein. Ist $a = (a_v)$ und U Produkt der Umgebungen U_v von a_v in G_{k_v} mit $U_v = G_{\mathfrak{o}_v}$ für fast alle v, so fordert (1.1) die Existenz eines $x \in G_k$, das unendlich vielen Bedingungen für die sämtlichen $v \notin S$ genügt. Wenn S alle unendlichen Stellen von k enthält, so können wir uns die endlich vielen von $G_{\mathfrak{o}_v}$ verschiedenen U_v durch Kongruenzen modulo Potenzen

[1]) Fertiggestellt während eines Aufenthaltes am Institute for Advanced Study, Princeton, mit Unterstützung durch das Air Force Office of Scientific Research unter Grant AF-AFOSR-62-124.

der $\mathfrak{p}_v$ beschrieben denken. Unser Problem ist dann also gleichdedeutend mit der Frage, ob für beliebig vorgegebene Stellen $v_i \notin S$ $(i = 1, \ldots, n)$, Elemente $a_v \in G_{k_v}$ und Exponenten t_v die Forderungen

$$x \equiv a_v \bmod \mathfrak{p}_v^{t_v} \qquad (v = v_1, \ldots, v_n) \tag{1.2}$$

$$x \in G_{\mathfrak{o}_v} \qquad (v \notin S,\ v \neq v_1, \ldots, v_n) \tag{1.3}$$

gleichzeitig durch ein Element x aus G_k erfüllt werden können; dabei sind die Kongruenzen (1. 2) koordinatenweise zu verstehen. Ist das der Fall (bzw. gilt (1. 1), wenn S nicht alle unendlichen Stellen enthält), so sagen wir, G gestatte starke Approximation bezüglich S (im Gegensatz zur schwachen Approximation, bei der die Forderungen (1. 3) wegfallen; vgl. dazu [14]).

In dieser oder ähnlicher Form ist das Problem schon für eine ganze Reihe von Gruppen behandelt und auf zahlentheoretische Fragen angewandt worden [6, 7, 8, 12, 16, 21]. Wir wollen hier eine möglichst genaue Übersicht über die in Frage kommenden Gruppen gewinnen. Zunächst beweisen wir in § 2 den in [13] angekündigten

Satz 1. *Ist $G \neq \{1\}$, und gestattet G starke Approximation bezüglich S, so ist*

(1. 4) *G_S nicht kompakt,*

(1. 5) *G einfach zusammenhängend*[2]).

Insbesondere gilt:

(1. 6) *Das Radikal N von G ist unipotent;*

(1. 7) *G/N ist direktes Produkt k-fast-einfacher Gruppen*[3]), *die selbst starke Approximation bezüglich S gestatten.*

Da man leicht einsieht, daß unter der Voraussetzung (1. 6) starke Approximation für G gleichbedeutend ist mit der für G/N (Hilfssatz 2. 4) und für ein Produkt mit der für die einzelnen Faktoren (Hilfssatz 2. 3), so reduziert sich unsere Aufgabe darauf, für möglichst viele einfach zusammenhängende k-fast-einfache Gruppen G nachzuweisen, daß die Bedingung (1. 4) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist; ist dies Fall, so sagen wir, für G gelte der starke Approximationssatz. Im Beweis kann man sich dabei sogar auf (absolut)fast-einfache Gruppen[3]) beschränken (Hilfssatz 2. 5). Hauptergebnis dieser Arbeit ist (vgl. [15])

Satz 2. *Der starke Approximationssatz gilt für alle einfach zusammenhängenden k-fast-einfachen klassischen Gruppen (im Sinne von* [24, 25]; *das sind Gruppen, die isogen zu Automorphismengruppen halbeinfacher Algebren mit Involution sind; oder auch: Gruppen vom Typ A_n, B_n, C_n oder D_n, mit Ausnahme gewisser Gruppen vom Typ D_4).*

Für die Normeinsgruppe einer einfachen Algebra oder, mit anderen Worten, für die spezielle lineare Gruppe über einem Schiefkörper endlichen Ranges über k, stammt der Satz von Eichler [6], und die Beweise für andere Gruppen [7, 12, 16, 21] stützen sich auf diesen Fall, indem die Existenz von Untergruppen benützt wird, die isomorph zu Normeinsgruppen von Quaternionenalgebren sind. Im vorliegenden ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß man auf diese Weise fast alle klassischen Gruppen behandeln kann. Nur beim Typ $A_n (n \geqq 2)$ treten Ausnahmen auf: Hier bekommt man zwar außer den Norm-

[2]) Im Sinne der algebraischen Gruppen; vgl. den Anhang § 7.

[3]) Wegen der Definition dieser Begriffe vgl. den Anhang.

einsgruppen noch die unitären Gruppen über kommutativen Erweiterungen von k; aber bei unitären Gruppen hermitescher Formen über einem Schiefkörper mit einer Involution zweiter Art finden sich keine geeigneten Untergruppen, falls die Form die Null nicht darstellt. Das ist in § 5 ausgeführt. Vorher wird aber noch in §§ 3, 4 der Eichlersche Beweis in die Sprache der Adele übertragen, und zwar aus zwei Gründen. Erstens ergeben sich eine Reihe von Vereinfachungen, und es erscheint mir nicht überflüssig, für diesen wichtigen Spezialfall einen möglichst einfachen Beweis zu haben (der Eichlersche Beweis zieht sich über zwei Veröffentlichungen hin). Zweitens habe ich den Beweis so umgearbeitet, daß er sich auf andere algebraische Gruppen übertragen läßt. Das soll im zweiten Teil der Arbeit geschehen, wo dann u. a. auch die oben ausgeschlossenen Gruppen vom Typ A_n behandelt werden. Genauer wird dort der Approximationssatz für diejenigen Typen einfach zusammenhängender Gruppen bewiesen, für die das Hasse-Prinzip für die eindimensionale Galois-Kohomologie gilt, für die also die kanonische Abbildung $H^1(k, G) \to \prod_v H^1(k_v, G)$ injektiv ist (vgl. [15], Satz 4 und [20]). Das ist jedenfalls für alle einfach zusammenhängenden klassischen Gruppen der Fall. Dieser allgemeinere Beweis ist allerdings in den Einzelheiten erheblich komplizierter und erfordert naturgemäß die Heranziehung der Strukturtheorie linearer algebraischer Gruppen. Demgegenüber werden im ersten Teil möglichst wenig solche Hilfsmittel benützt.

In § 6 wird kurz auf nicht einfach zusammenhängende reduktive Gruppen und die Bestimmung von Klassenzahlen eingegangen. In § 7 schließlich sind einige einfache Tatsachen über einfach zusammenhängende Gruppen zusammengestellt, die ich in der Literatur nicht finden konnte.

2. Reduktion auf den Fall fast-einfacher Gruppen

Wir beweisen Satz 1 und zeigen nacheinander, daß starke Approximation sicher nicht statthat, wenn G_S kompakt ist, wenn G nicht zusammenhängend ist, und schließlich, wenn G eine echte Überlagerung gestattet. Zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 2. 1. *Ist H eine von G verschiedene über k definierte Untergruppe von G, so ist $H_{k_v} \cap G_{\mathfrak{o}_v} \neq G_{\mathfrak{o}_v}$ für unendlich viele v.*

Beweis. K sei eine endlich algebraische Erweiterung von k und x ein Punkt aus G_K, der nicht in H liegt. Es gibt unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}_v$ von k, die in K voll zerlegt sind; für diese gibt es k-Isomorphismen φ_v von K in k_v; dann liegt $\varphi_v(x)$ in G_{k_v} und für fast alle v sogar in $G_{\mathfrak{o}_v}$, aber nicht in H_{k_v}.

Hilfssatz 2. 2. *Sind F und G zusammenhängend, und ist $f\colon F \to G$ eine über k definierte echte Überlagerung, so ist $f(F_{\mathfrak{o}_v}) \neq G_{\mathfrak{o}_v}$ für unendlich viele v.*

Beweis. E sei der Kern von f, $E^{(v)}$, $F^{(v)}$, $G^{(v)}$ die für fast alle v wohldefinierten, durch Reduktion modulo $\mathfrak{p}_v$ aus E, F, G entstehenden algebraischen Gruppen über dem Restklassenkörper $k^{(v)} = \mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$. Mit Ausnahme von endlich vielen v sind $F^{(v)}$ und $G^{(v)}$ zusammenhängend, die exakte Folge $0 \to E \to F \xrightarrow{f} G \to 0$ geht in eine exakte Folge $0 \to E^{(v)} \to F^{(v)} \xrightarrow{f^{(v)}} G^{(v)} \to 0$ über, und man bekommt alle Punkte aus $G^{(v)}_{k^{(v)}}$ durch Reduktion modulo $\mathfrak{p}_v$ von Punkten aus $G_{\mathfrak{o}_v}$ (s. z. B. [24], pp. 17—22). Also ist $f^{(v)}$ eine Isogenie, und daher haben $F^{(v)}_{k^{(v)}}$ und $G^{(v)}_{k^{(v)}}$ gleich viele Elemente [17]. Andererseits sind die endlich vielen Elemente aus E rational über einer endlich algebraischen Erweiterung K von k, also auch über k_v für unendlich viele v wie im Beweis zu Hilfssatz 2. 1, und sie sind in $E_{\mathfrak{o}_v}$ und inkongruent modulo $\mathfrak{p}_v$ für fast alle diese v. Dann folgt aber $f^{(v)}(F^{(v)}_{k^{(v)}}) \neq G^{(v)}_{k^{(v)}}$, also $f(F_{\mathfrak{o}_v}) \neq G_{\mathfrak{o}_v}$.

Nun sei G_S kompakt, die Projektion p_S von G_A auf G_A/G_S also eigentlich. Da G_k diskret in G_A ist, gilt dasselbe von $p_S(G_k)$ in $p_S(G_A)$. Wegen $G \neq \{1\}$ und Hilfssatz 2. 1 (mit $H = \{1\}$) ist $p_S(G_A)$ nicht diskret, also $p_S(G_k)$ nicht dicht in $p_S(G_A)$ und daher auch $G_k G_S$ nicht dicht in G_A.

Ist zweitens G unzusammenhängend, G^0 die Zusammenhangskomponente der Eins, so gibt es nach Hilfssatz 2. 1 ein $v \notin S$ mit $G_{k_v} \neq G^0_{k_v}$. Ein Adel, dessen v-Komponente nicht in $G^0_{k_v}$ liegt, dessen andere Komponenten aber alle 1 sind, ist sicher kein Häufungspunkt von $G_k G_S$ (man sieht, daß noch nicht einmal der schwache Approximationssatz gilt).

Gibt es schließlich eine echte über k definierte Überlagerung $f: F \to G$, so beachten wir, daß die starke Approximation bezüglich S die bezüglich jeder größeren Menge nach sich zieht. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß S alle unendlichen Stellen und alle diejenigen endlichen v enthält, für die $F_{\mathfrak{o}_v}$ oder $G_{\mathfrak{o}_v}$ keine Gruppe oder $f(F_{\mathfrak{o}_v})$ nicht in $G_{\mathfrak{o}_v}$ enthalten ist. Mit $A(S) = \prod_{v \in S} k_v \prod_{v \notin S} \mathfrak{o}_v$ und $\mathfrak{o}(S) = k \cap A(S)$ ist dann $[G_{\mathfrak{o}(S)} : f(F_{\mathfrak{o}(S)})]$ endlich ([1], 8. 12 oder [10], Thm. 3). Außerdem ist

$$f(F_{\mathfrak{o}(S)})\, G_S \subset f(F_{A(S)})\, G_S \subset f(F_{A(S)})\, G_S \prod_{v \notin S \cup T} G_{\mathfrak{o}_v}$$

für jede endliche zu S fremde Menge T von Primstellen, und die letzte Gruppe ist offen in G_A. Wenn also $G_k G_S$ in G_A dicht liegt, so auch $G_{\mathfrak{o}(S)} G_S = G_k G_S \cap G_{A(S)}$ in $G_{A(S)}$, und es folgt

$$(2.\,1) \qquad \Big[G_{A(S)} : f(F_{A(S)})\, G_S \prod_{v \notin S \cup T} G_{\mathfrak{o}_v}\Big] \leqq [G_{\mathfrak{o}(S)} G_S : f(F_{\mathfrak{o}(S)})\, G_S] \leqq [G_{\mathfrak{o}(S)} : f(F_{\mathfrak{o}(S)})].$$

Andererseits ist

$$\Big[G_{A(S)} : f(F_{A(S)})\, G_S \prod_{v \notin S \cup T} G_{\mathfrak{o}_v}\Big] = \prod_{v \in T} [G_{\mathfrak{o}_v} : f(F_{\mathfrak{o}_v})],$$

und dieser Index kann nach Hilfssatz 2. 2 durch geeignete Wahl von T beliebig groß gemacht werden, im Widerspruch zu (2. 1).

Wenn also G starke Approximation bezüglich S gestattet, so ist G zusammenhängend und hat keine über k definierte echte Überlagerung. Nach dem im Anhang bewiesenen Hilfssatz 7. 3 ist G dann einfach zusammenhängend, und es gilt (1. 6); die Behauptung (1. 7) folgt schließlich aus Hilfssatz 7. 4 und den beiden folgenden, von denen der erste trivial ist.

Hilfssatz 2. 3. *Ein Produkt endlich vieler Gruppen gestattet genau dann starke Approximation bezüglich S, wenn dies für jeden einzelnen Faktor gilt.*

Hilfssatz 2. 4. *Ist N ein unipotenter Normalteiler von G, so gilt der starke Approximationssatz für G genau dann, wenn er für G/N gilt.*

Beweis. Durch Induktion nach dim N kann man den Beweis auf den Fall zurückführen, daß N die additive Gruppe eines Vektorraumes ist, so daß also für N der Approximationssatz gilt (s. z. B. [11], p. 351). Setzen wir $G/N = H$, so hat man folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N_k N_S & \to & G_k G_S & \to & H_k H_S & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & N_A & \longrightarrow & G_A & \longrightarrow & H_A & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

in dem die Zeilen exakt sind; die Abbildung $G_A \to H_A$ ist offen, da $G \to H$ lokale Schnittflächen besitzt ([24], Thm. 2. 4. 2). Gilt nun der Approximationssatz für H, so sind gerade die Voraussetzungen von 3. 1 in [14] erfüllt, und es folgt der Approximationssatz für G. Für den ganz analogen Schluß in der umgekehrten Richtung braucht man sogar nur die vier rechten Glieder des Diagramms.

Wegen Satz 1 brauchen wir im folgenden nur noch k-fast-einfache einfach zusammenhängende Gruppen G zu betrachten. Nach Hilfssatz 7. 5 entsteht G aus einer fast-einfachen Gruppe H über einem Oberkörper l durch Restriktion des Grundkörpers ([24], § 1. 3). Der folgende Hilfssatz zeigt, daß wir statt G über k auch H über l betrachten können.

Hilfssatz 2. 5. *Entsteht G aus H durch Restriktion des Grundkörpers von l nach k, und besteht T aus allen Fortsetzungen der Bewertungen aus S auf l, so gilt starke Approximation für G, S über k genau dann, wenn sie für H, T über l gilt; G_S ist genau dann kompakt, wenn H_T es ist.*

Beweis. Der kanonische Isomorphismus von G_{A_k} mit H_{A_l} führt G_S, G_k in H_T, H_l über ([24]; § 1. 3).

3. Die Normeinsgruppe einer einfachen Algebra

In diesem Abschnitt sei B eine über k definierte einfache Algebra der Dimension n^2 mit dem Grundkörper als Zentrum, $N(x)$ die reduzierte Norm von $x \in B$ und $G = \{x \in B \mid N(x) = 1\}$. Wir wollen den starken Approximationssatz für G beweisen. Um den Grundgedanken, der ebenso wie manche Einzelheiten dem Eichlerschen Beweis [6] entnommen ist, besser hervortreten zu lassen, sind die Beweise einiger Hilfssätze auf den nächsten Abschnitt verschoben. Sie finden sich teilweise in ähnlicher Form schon in [6], teilweise sind sie sicher bekannt und hier nur der Vollständigkeit halber aufgenommen.

Wir betrachten zu einem Element x aus G das Hauptpolynom

$$P_x(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)\, X^i + (-1)^n,$$

bezeichnen mit p die Abbildung $x \to (a_i(x))$ von G in den $(n-1)$-dimensionalen Vektorraum E. Für diesen haben ähnlich wie für G die Bezeichnungen E_A, E_k, $E_{\mathfrak{o}_v}$, E_S einen Sinn. Außerdem bezeichnen wir mit p_A, p_v die zugehörigen Abbildungen von G_A, G_{k_v} in E_A, E_{k_v}. Wir nennen ein Element $x \in G$ bzw. ein Polynom P regulär, wenn P_x bzw. P keine mehrfachen Nullstellen hat. Die Regularität eines Elementes $x \in G_{k_v}$ wird durch das Nichtverschwinden der Diskriminante von P_x, also einer holomorphen Funktion $f(x)$ beschrieben. Ist $a_v \in G_{k_v}$, so läßt sich f in einer Umgebung von a_v in eine nicht identisch verschwindende v-adische konvergente Potenzreihe in lokalen Uniformisierenden entwickeln. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen liegen also die regulären Elemente dicht in G_{k_v}.

Um nun den Approximationssatz für G zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß jedes Element $a = (a_v)$ aus G_A mit nur einer von 1 verschiedenen Komponente a_{v_0} Häufungspunkt von $G_k G_S$ ist, da die endlichen Produkte solcher Elemente in G_A dicht liegen. Nach dem eben Bewiesenen können wir zudem a_{v_0} regulär voraussetzen. Sei also U eine Umgebung von a. Ohne Einschränkung können wir U als Produkt v-adischer Umgebungen U_v von a_v annehmen, mit $U_v = G_{\mathfrak{o}_v}$ für fast alle v, und U_{v_0} so klein, daß nur reguläre Elemente darin liegen. Wir haben dann nachzuweisen, daß $G_k \cap UG_S \neq \emptyset$ ist. Das geschieht über die Zwischenbehauptungen (3. 1) bis (3. 5). Die erste,

$$E_k \cap (p_A(U) + E_S) \neq \emptyset, \tag{3. 1}$$

ist eine Folge des Approximationssatzes für die affine Gerade ([11], p. 351), sobald feststeht, daß $p_A(U)$ innere Punkte von E_A enthält. Dazu ist zu zeigen, daß $p_v(U_v)$ innere

Punkte hat und daß E_{0_v} in $p_v(U_v)$ liegt für fast alle v. Da U_v innere Punkte und daher reguläre Elemente enthält und $U_v = G_{0_v}$ ist für fast alle v, sind also folgende beide Hilfssätze zu beweisen.

Hilfssatz 3. 1. *Sei b ein reguläres Element aus G_{k_v}, $H_{k_v} = G_{k_v} \cap k_v[b]$ (das ist der Zentralisator von b in G_{k_v}), V eine Umgebung von b in H_{k_v}. Dann ist $p_v(V)$ eine Umgebung von $p_v(b)$ in E_{k_v}.*

Hilfssatz 3. 2. *Für fast alle v ist $p_v(G_{0_v}) = E_{0_v}$.*

Die Beweise folgen in § 4.

Im nächsten Schritt verschärfen wir (3. 1) zu

$$E_k \cap p_A(UG_S) \neq \emptyset. \tag{3. 2}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $v \in S$, etwa $v = v_1$, für welches G_{k_v} nicht kompakt ist. Da die Behauptung durch Verkleinerung von S verschärft wird, können wir ohne Einschränkung $S = \{v_1\}$ annehmen. Die Aussage (3. 1) gilt natürlich auch für dieses neue S. Es sei also $P \in E_k$ ein innerer Punkt von $p_A(U) + E_S$. Weiter sei $Q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i X^i$ aus $k[X]$, e eine natürliche Zahl und t ein Element aus k. Dann liegt auch $P + t^e Q$ in $E_k \cap (p_A(U) + E_S)$, falls folgende beide Bedingungen erfüllt sind: $|t|_v \leqq 1$ für alle endlichen Stellen $v \neq v_1$, für die $E_{0_v} \subseteq p_v(U_v)$ und $|b_i| \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ ist; und $|t|_v$ ist hinreichend klein für die endlich vielen anderen Stellen $v \neq v_1$. Solche Elemente $t \neq 0$ gibt es ([11], p. 351), und wegen der Produktformel kann dabei $|t|_{v_1}$ beliebig groß gemacht werden. Daß bei geeigneter Wahl von Q dann $P + t^e Q$ sogar in $E_k \cap p_A(UG_S)$ liegt, folgt (mit $v = v_1$) aus dem

Hilfssatz 3. 3. *Ist G_{k_v} nicht kompakt, so gibt es ein $Q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i X^i$ aus $k[X]$, eine natürliche Zahl e und zu jedem $P \in E_k$ eine Zahl $N = N(P)$ derart, daß $P + t^e Q$ in $p_v(G_{k_v})$ liegt für jedes $t \in k_v$ mit $|t|_v > N$.*

Beweis in § 4.

$$p_A(G_k) \cap p_A(UG_S) \neq \emptyset. \tag{3. 3}$$

Liegt nämlich das Polynom P in $E_k \cap p_A(UG_S)$, so ist es wegen der über U_{v_1} gemachten Annahme regulär; außerdem liegt es für jedes v in $p_v(G_{k_v})$, also nach dem folgenden Hilfssatz auch in $p_A(G_k)$.

Hilfssatz 3. 4[4]. *Ein reguläres Polynom aus $k[X]$ ist genau dann Hauptpolynom eines Elementes aus G_k, wenn es für jede Stelle v Hauptpolynom eines Elementes aus G_{k_v} ist.*

Beweis in § 4.

Für das Weitere bezeichnen wir mit H die multiplikative Gruppe von B und setzen $x^t = t^{-1} x t$ für $x \in G$, $t \in H$. Wir benötigen den

Hilfssatz 3. 5[4]. (*k ein beliebiger Körper.*) *Sind x, y reguläre Elemente aus G_k mit $p(x) = p(y)$, so gibt es ein $t \in H_k$ mit $x^t = y$.*

Beweis in § 4.

$$G_k^{H_A} \cap UG_S \neq \emptyset. \tag{3. 4}$$

---

[4]) Die Hilfssätze 3. 4, 3. 5 und 4. 1 sind für irreduzible Polynome natürlich wohlbekannt, und die Beweise für den allgemeinen Fall werden mit denselben Hilfsmitteln geführt; ich habe sie aber in der Literatur nicht gefunden.

Nach (3. 3) gibt es nämlich ein $x \in G_k$ und ein $y = (y_v) \in UG_S$ mit $p_A(x) = p_A(y)$. Für fast alle v liegt x in U_v. Für die endlich vielen Ausnahmen sei $x^{t_v} = y_v$ mit $t_v \in H_{k_v}$ nach Hilfssatz 3. 5. Setzen wir $t_v = 1$ für alle übrigen v und $t = (t_v)$, so liegt t in H_A und x^t in UG_S, und das beweist (3. 4).

Wir setzen jetzt voraus, daß $H_A = H_k H_S D^{-1}$ ist mit einer kompakten Menge D. Daß das für beliebige algebraische Gruppen stets der Fall ist, kann man ebenso beweisen wie die „Endlichkeit der Klassenzahl" in [9], Thm. 5. Will man diese Ergebnisse über allgemeine algebraische Gruppen aber vermeiden, so kann man ohne großen Mehraufwand auch so schließen: Wenn B_k keine Nullteiler hat, so ist die Annahme richtig (s. z. B. [24], Lemma 3. 1. 1.); wenn B_k dagegen Nullteiler hat, so kann der Approximationssatz noch einfacher bewiesen werden, wie in § 5 ausgeführt wird. Übrigens bedeutet die Existenz von D gerade die Endlichkeit der Klassenzahl irgend einer Ordnung in B_k, falls S genau aus den unendlichen Stellen besteht, so daß auch in diesem Fall (das ist der von Eichler behandelte) § 5 nicht benötigt wird.

Aus (3. 4) und $H_A = H_k H_S D^{-1}$ folgt jetzt

$$\overline{G_k G_S} \cap U^D \neq \emptyset, \tag{3. 5}$$

wo der Querstrich die abgeschlossene Hülle bedeutet. Läßt man hier U alle kompakten Umgebungen von a durchlaufen, so haben je endlich viele der Mengen (3. 5) einen nicht leeren Durchschnitt; also enthält auch der Durchschnitt $\overline{G_k G_S} \cap \{a\}^D$ aller ein Element $b = a^d$. Strebt nun $c \in B_k$ v_0-adisch gegen die v_0-Komponente von d^{-1}, so strebt $b^c \in \overline{G_k G_S}$ in G_A gegen a, da ja für $v \neq v_0$ die v-Komponenten von a und daher auch von b gleich 1 sind. Also ist a Häufungspunkt von $G_k G_S$ wie behauptet.

4. Einige Hilfssätze

Wir beweisen nacheinander die in § 3 benötigten Hilfssätze.

Hilfssatz 3. 1. Wir bezeichnen mit q die Abbildung $x \to P_x$ von $k_v[b]$ in einen E_{k_v} umfassenden n-dimensionalen affinen Raum und zeigen, daß q in y den Rang n hat. Dann hat $q \mid q^{-1}(E_{k_v}) = p_v \mid H_{k_v}$ in y den Rang $n - 1$, und die Behauptung folgt aus allgemeinen Sätzen über Potenzreihen. Wir entwickeln P_x für $x \in k_v[b]$ nach Potenzen der Koordinaten von $x - b$:

$$P_x(X) = P_b(X) + Q_{x-b}(X) + \cdots,$$

wo Q_{x-b} ein Polynom in X vom Grad $\leqq n - 1$ ist, das linear von $x - b$ abhängt, und die Punkte Glieder höherer Ordnung in $x - b$ bedeuten. Aus

$$\begin{aligned} P_x(x) &= P_b(x) + Q_{x-b}(x) + \cdots \\ &= P_b(b) + P_b'(b)\,(x - b) + Q_{x-b}(b) + \cdots \end{aligned}$$

folgt wegen $P_x(x) = P_b(b) = 0$ durch Vergleich der linearen Glieder, daß Q_{x-b} nur dann identisch in X verschwinden kann, wenn $P_b'(b)\,(x - b) = 0$ ist; das ist aber wegen der Voraussetzung über b nur für $x - b = 0$ der Fall.

Hilfssatz 3. 2. $E_{\mathfrak{o}_v}$ besteht aus allen Polynomen in E mit Koeffizienten in $\mathfrak{o}_v$; $B_{\mathfrak{o}_v}$ ist für fast alle v eine unverzweigte $\mathfrak{o}_v$-Ordnung, also isomorph dem n-reihigen Matrizenring über $\mathfrak{o}_v$. Der Beweis des Hilfssatzes folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß

$X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ Hauptpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist.

Hilfssatz 3. 3. Daß G_{k_v} nicht kompakt ist, bedeutet, daß B_{k_v} Nullteiler hat, also Matrizenring über einem Schiefkörper der Dimension $e^2 < n^2$ über k_v ist. Daß $P + t^e Q$ in $p_v(G_{k_v})$ liegt, bedeutet wegen des untenstehenden Hilfssatzes 4. 1 und des Zerfallskriteriums für Algebren über lokalen Körpern ([4], VII, §§ 2, 3), daß der Grad jedes über k_v irreduziblen Faktors von $P + t^e Q$ durch e teilbar ist. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $e = 1$; dann ist die Bedingung von selbst erfüllt.

b) $e = 2$, und k_v ist der reelle Zahlkörper; dann setzen wir $Q(X) = X^2$ und erreichen dadurch, daß $P + t^e Q$ für genügend großes $|t|_v$ keine reellen Nullstellen hat.

c) v ist eine endliche Primstelle; dann sei $Q = \pi X^e$ mit einem Primelement π von $\mathfrak{o}_v$; da das Newtonsche Polygon (s. z. B. [19], § 5) von $P + t^e Q$ für genügend großes $|t|_v$ nur Gitterpunkte mit durch e teilbarer Abszisse enthält, folgt auch hier die Behauptung.

Hilfssatz 3. 4. folgt aus dem Zerfallskriterium für Algebren über Zahlkörpern ([4], VII, § 5) und aus dem

Hilfssatz 4. 1[4]. (*k ein beliebiger Körper.*) *Ein reguläres Polynom P aus E_k ist genau dann Hauptpolynom eines Elementes aus G_k, wenn $B_k \otimes_k k[X]/P_i(X)$ für jeden über k irreduziblen Faktor P_i von P voller Matrixring über $k[X]/P_i(X)$ ist.*

Beweis. $L = k[X]/P(X)$ ist direkte Summe der Körper $L_i = k[X]/P_i(X)$. Wenn P Hauptpolynom eines Elementes aus G_k ist, so enthält B_k eine zu L isomorphe Unteralgebra, die wir mit L identifizieren. Über der algebraisch abgeschlossenen Hülle $\bar{k}$ von k wird B zum n-reihigen Matrizenring, und L läßt sich als kommutative separable Algebra auf Diagonalgestalt transformieren. Also ist $B_{\bar{k}}$ als $L_{\bar{k}}$-Rechtsmodul frei mit n Erzeugenden. Aus Dimensionsgründen gilt dasselbe dann auch über k:

$$B_k = \bigoplus_{j=1}^{n} b_j L.$$

Es folgt:

$$B_k L_i = \bigoplus_{j=1}^{n} b_j L_i$$

ist ein n-dimensionaler L_i-Vektorraum, auf dem B_k von links operiert. B hat also eine Darstellung vom Grad n über L_i, und daraus folgt die eine Hälfte der Behauptung.

Ist umgekehrt $B_k \otimes_k L_i$ n-reihiger Matrizenring über L_i, so sei B_k^0 die inversisomorphe Algebra zu B_k; dann ist auch $B_k^0 \otimes_k L$ n-reihiger Matrizenring $M_n(L)$ über L. Da L isomorph in $M_n(k)$ eingebettet werden kann, gibt es einen Isomorphismus φ von $B_k^0 \otimes_k L \cong M_n(L)$ in $M_n(M_n(k)) = M_{n^2}(k) \cong B_k^0 \otimes_k B_k$. Durch einen inneren Automorphismus kann man $\varphi(B_k^0 \otimes k) = B_k^0 \otimes k$ erreichen. Dann liegt aber $\varphi(k \otimes L)$ in der kommutierenden Algebra $k \otimes B_k$ von $B_k^0 \otimes k$. B_k enthält daher eine zu L isomorphe Teilalgebra, also ein Element mit P als Hauptpolynom.

Hilfssatz 3. 5[4]). Mit denselben Bezeichnungen wie im Beweis von Hilfssatz 4. 1 kann man L jetzt auf zwei Weisen in B_k einbetten, durch $X \to x$ und $X \to y$. Beide Male wird B_k zu einem B_k-Links- und L-Rechts-Modul, und wie oben sieht man, daß beide Moduln isomorph sind. Der Isomorphismus wird wegen der Vertauschbarkeit mit Linksmultiplikation mit beliebigen Elementen aus B_k durch Rechtsmultiplikation mit einem invertierbaren Element t aus B_k gegeben, und dieses t muß außerdem die Bedingung $bxt = bty$ für alle $b \in B_k$ erfüllen; es folgt $y = x^t$.

5. Die klassischen Gruppen

In diesem Abschnitt sei G eine einfach zusammenhängende k-fast-einfache klassische Gruppe, Z ihr Zentrum. Wir beweisen zuerst drei Hilfssätze und zeigen dann, daß daraus der Satz 2 folgt. Aufgrund der Hilfssätze 7. 5 und 2. 5 können und wollen wir G fast-einfach voraussetzen.

Hilfssatz 5. 1 (Schwacher Approximationssatz). *T sei eine endliche Menge von Stellen von k, π_T die Projektion von G_A auf G_T. Dann ist $\pi_T(G_k)$ dicht in G_T.*

Beweis. Siehe [14].

Hilfssatz 5. 2. *Für fast alle Stellen v von k ist jeder echte Normalteiler von G_{k_v} in Z_{k_v} enthalten.*

Beweis[5]). Aus [25], no. 3 folgt, daß man G folgendermaßen erhalten kann. Es sei B eine halbeinfache Algebra mit einem involutorischen Antiautomorphismus ι, beide über k definiert, G_0 die Komponente der Eins in der Automorphismengruppe von (B, ι) und G die einfach zusammenhängende Überlagerung von G_0. Da G fast-einfach ist, muß B als Algebra mit Involution einfach und k gerade der unter ι invariante Teil des Zentrums von B_k sein. C sei eine Ordnung in B_k, x_i eine in $C \cap C^\iota$ enthaltene Basis von B_k über k. Dann ist $\det sp_{B/k}(x_i x_j)$ nicht null, für fast alle v also eine Einheit von $\mathfrak{o}_v$. Für diese v ist B_{k_v} unverzweigt, also ein Matrizenring über dem Zentrum und dieses eine unverzweigte halbeinfache Algebra vom Grad 1 oder 2 über k_v. Für G_{k_v} kommen also folgende Möglichkeiten in Frage. Typ A_n: Spezielle lineare Gruppe $SL_{n+1}(k_v)$ oder spezielle unitäre Gruppe einer hermiteschen Form, deren Diskriminante eine Einheit in $\mathfrak{o}_v$ ist, über einer unverzweigten quadratischen Erweiterung von k_v; die Form stellt dann bekanntlich die Null nichttrivial dar; Typ C_n: Symplektische Gruppe $Sp_{2n}(k_v)$; Typ B_n oder $D_n (n \geqq 3)$: Spingruppe zu einer quadratischen Form q über k in drei, fünf oder mehr Veränderlichen[6]) und mit Einheitsdiskriminante; auch q stellt die Null nichttrivial dar. Für die Typen A_n und C_n folgt die Behauptung unmittelbar aus [5], Chap. II, §§ 2, 4, 5; für B_1, also für Spingruppen zu orthogonalen Gruppen in drei Variablen durch die Isomorphie mit $SL_2(k_v)$. Für die höherdimensionalen Spingruppen sei F der aus zwei Elementen bestehende Kern des Überlagerungshomomorphismus f auf die spezielle orthogonale Gruppe $SO(q)$, H die in G enthaltene Spingruppe zu einer ternären, die Null darstellenden Teilform von q. Da $f(G_{k_v})$ gerade aus den Elementen von $SO(q, k_v)$ mit Spinornorm 1 besteht, so folgt aus [5], Chap. II, §§ 8, 9, daß jeder nicht in Z_{k_v} enthaltene Normalteiler N von G_{k_v} modulo F_{k_v} mit G_{k_v} übereinstimmt. Da außerdem F in H liegt, ist dann $N \cap H_{k_v}$ ein nicht im Zentrum gelegener Normalteiler von H_{k_v}; nach den obigen Überlegungen muß er gleich H_{k_v} sein, und es folgt $F_{k_v} < N$, also $N = G_{k_v}$.

---

[5]) Ein anderer Beweis, der die Ergebnisse aus [2, 22, 23] benützt, zeigt, daß der Hilfssatz für alle einfach zusammenhängenden fast-einfachen Gruppen gilt.

[6]) Die Spingruppen zu quadratischen Formen in vier Variablen sind bekanntlich nicht fast-einfach.

Den Hilfssatz 5. 3 beweisen wir hier nur für diejenigen klassischen Gruppen, die nicht zu den in der Einleitung erwähnten Ausnahmen vom Typ A_n gehören.

Hilfssatz 5. 3. *Ist G_S nicht kompakt, so gibt es zu jeder Stelle w von k ein Element $b = (b_v)$ aus der abgeschlossenen Hülle von $G_k G_S$ mit*

$$b_w \notin Z_{k_w} \tag{5. 1}$$

und

$$b_v = 1 \text{ für } v \neq w. \tag{5. 2}$$

Beweis. Wir werden für jede der Gruppen G eine über k definierte Untergruppe H aufweisen, für die H_S nicht kompakt und der Hilfssatz schon als gültig erkannt ist. Dann kann nämlich b_w in H_{k_w} gewählt werden. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn für H der starke Approximationssatz schon bewiesen ist.

Enthält G_k ein von 1 verschiedenes unipotentes Element, so ist die von diesem erzeugte algebraische Untergruppe H isomorph der additiven eindimensionalen Gruppe, und wir sind fertig. Ist z. B. G die Normeinsgruppe einer einfachen Algebra B, und hat B_k Nullteiler, so enthält G_k Transvektionen[7]), und das sind unipotente Elemente[8]); hat aber B_k keine Nullteiler, so gestattet G nach § 3 starke Approximation, und der Hilfssatz gilt auch hier (natürlich wird er in diesem Fall nicht zum Beweis des Approximationssatzes für G gebraucht, sondern nur für die folgende Behandlung der anderen klassischen Gruppen).

Weitere Gruppen G vom Typ A_n sind die speziellen unitären Gruppen $SU(X)$ zu einer hermiteschen Form h auf einem Vektorraum X über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper K mit einer Involution zweiter Art [25]. Ist K ein Schiefkörper, und stellt h die Null dar, so gibt es in G_k Transvektionen, also unipotente Elemente; stellt aber h die Null nicht dar, so liegt der Ausnahmefall vor. Ist andererseits K kommutativ, so ist für $\dim_K X = n + 1 = 2$ die Gruppe isomorph zur Normeinsgruppe einer Quaternionenalgebra; der Hilfssatz gilt also. Ist dagegen $\dim_K X > 2$, so sei Y ein nichtausgearteter zweidimensionaler Teilraum von X und H die Untergruppe der Elemente aus G, die auf dem orthogonalen Komplement von Y trivial operieren. Wegen $H \cong SU(Y)$ gilt der Hilfssatz dann für H, und wir müssen nur dafür sorgen, daß H_S nicht kompakt wird. Da G_S nicht kompakt ist, gilt dasselbe von G_{k_v} für mindestens ein $v \in S$. Hat $K_v = K \otimes_k k_v$ Nullteiler, so ist $H_{k_v} \cong SL_2(k_v)$ nicht kompakt. Ist aber K_v ein Körper, so enthält X_{K_v} isotrope Vektoren, also auch eine hyperbolische Ebene Y'. Approximiert man zwei Basisvektoren von Y' v-adisch durch Vektoren aus X und nennt die von diesen aufgespannte Ebene Y, so wird $Y_{K_v} \cong Y'$, also $H_{k_v} \cong SU(Y_{K_v}) \cong SU(Y')$ nicht kompakt.

Vom Typ C_n gibt es einmal die symplektischen Gruppen Sp_{2n}. Für $n = 1$ hat man $Sp_2 \cong SL_2$, und für $n > 1$ ist Sp_2 als Untergruppe in Sp_{2n} enthalten (man könnte auch die Existenz von Transvektionen heranziehen). Andere Gruppen vom Typ C_n sind unitäre Gruppen von hermiteschen Formen in n Variablen über Quaternionenschiefkörpern K mit Zentrum k. Für $n = 1$ bzw. 2 sind diese isogen zu orthogonalen Gruppen in 3 bzw. 5 Variablen, also isomorph zu Spingruppen, und für höhere Variablenzahlen hat man die Untergruppen zu binären Teilformen, wie bei den unitären Gruppen vom Typ A_n; wie dort hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob $K_v = K \otimes_k k_v$ Nullteiler hat für eine gewisse Stelle $v \in S$ oder nicht. Weitere Gruppen vom Typ C_n gibt es nicht, da

[7]) Für alle hier benützten Begriffe und Tatsachen über klassische Gruppen siehe [5].

[8]) Mit Transvektionen wird auch in [8], § 15 (im Fall orthogonaler Gruppen zu quadratischen Formen) gearbeitet.

über einem Zahlkörper k Quaternionenalgebren die einzigen Schiefkörper mit Zentrum k und einem k-Antiautomorphismus sind.

Für Spingruppen zu orthogonalen Gruppen in mindestens drei Variablen, die alle einfach zusammenhängenden fast-einfachen Gruppen vom Typ B_n und einen Teil derer vom Typ D_n umfassen, hat man für ternäre Formen die Isomorphie mit Normeinsgruppen von Quaternionenalgebren, für höhere Variablenzahl Untergruppen, die zu ternären Teilformen gehören.

Vom Typ D_n gibt es schließlich außer den Spingruppen noch die einfach zusammenhängende Überlagerung G unitärer Gruppen von schief-hermiteschen Formen in n Variablen über Quaternionenschiefkörpern K mit Zentrum k. Ähnlich wie in den anderen Fällen wählen wir eine zu einer binären Teilform gehörige Untergruppe H so aus, daß H_S nicht kompakt ist. Über der algebraisch abgeschlossenen Hülle von k wird H isomorph zur Spingruppe in vier Variablen, also zu $SL_2 \times SL_2$. Nach Hilfssatz 7. 4 ist H entweder k-fast-einfach von Typ A_1 oder Produkt zweier einfacher Gruppen dieses Typs, von denen mindestens einer nichtkompakte S-Komponente hat. Nach § 3 gilt in jedem Fall für H oder einen seiner Faktoren der starke Approximationssatz, also auch der Hilfssatz. Wie beim Typ C_n gibt es auch hier keine weiteren Gruppen.

Der Beweis für Satz 2 in den angegebenen Fällen folgt aus dem nächsten Hilfssatz, der für beliebige algebraische Gruppen G gilt.

Hilfssatz 5. 4. *Der starke Approximationssatz gilt für G, wenn die Aussagen der Hilfssätze* 5. 1, 5. 2, 5. 3 *für G zutreffen.*

Beweis. Sei w eine Stelle von k, die nicht zu den Ausnahmen von Hilfssatz 5. 2 gehört, $b = (b_v)$ ein Element aus der abgeschlossenen Hülle von $G_k G_S$ mit den Eigenschaften (5. 1) und (5. 2). Dann ist G_{k_w} selbst der kleinste b_w enthaltende Normalteiler von G_{k_w}. Jedes Element c_w aus G_{k_w} ist also ein Produkt von Elementen $x b_w^{\pm 1} x^{-1}$ mit $x \in G_{k_w}$. Nach Hilfssatz 5. 1 ist x Häufungspunkt von Elementen $\pi_{\{w\}}(y)$ mit $y \in G_k$, das Element $c = (c_v) \in G_A$ mit $c_v = 1$ für $v \neq w$ wegen $b_v = 1$ für $v \neq w$ also Häufungspunkt von Produkten von Elementen $y b^{\pm 1} y^{-1}$ mit $y \in G_k$. Da b in der abgeschlossenen Hülle von $G_k G_S$ liegt, gilt dasselbe auch von c. Die Produkte von solchen Elementen c, für alle w, die nicht zu der endlichen Ausnahmemenge T von Hilfssatz 5. 2 gehören, liegen — mit $\overset{-1}{\pi}_T$ aus Hilfssatz 5. 1 — dicht in $\overline{\overset{-1}{\pi}_T(1)}$. Nach Hilfssatz 5. 1 folgt also

$$\overline{G_k G_S} \geqq \overline{\pi_T(G_k)\, \overline{\overset{-1}{\pi}_T(1)}} \geqq \overline{\pi_T(G_k)}\, \overline{\overset{-1}{\pi}_T(1)} = G_T \overline{\overset{-1}{\pi}_T(1)} = G_A,$$

und das war zu beweisen.

6. Reduktive, nicht einfach zusammenhängende Gruppen

Ist G reduktiv aber nicht halbeinfach, oder halbeinfach aber nicht einfach zusammenhängend, so gestattet G keine starke Approximation. Als Ersatz haben wir den

Satz 6. 1. *Ist G reduktiv und zusammenhängend, die Kommutatorgruppe F von G k-fast-einfach, F_S nicht kompakt, und gilt für die einfach zusammenhängende Überlagerung E von F der starke Approximationssatz, so ist die Kommutatorgruppe von G_A in der abgeschlossenen Hülle von $G_k G_S$ enthalten.*

Beweis. $f: E \to F$ sei der Überlagerungshomomorphismus. Da E starke Approximation gestattet, ist $f(E_A)$ in der abgeschlossenen Hülle von $G_k G_S$ enthalten. Es genügt also zu zeigen, daß für jede Stelle v von k die Kommutatorgruppe von G_{k_v} in $f(E_{k_v})$ enthalten ist. Das folgt aus

Hilfssatz 6.2. *Ist G eine reduktive und zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über dem vollkommenen Körper k, F die Kommutatorgruppe von G, $f: E \to F$ eine über k definierte Überlagerung, so enthält $f(E_k)$ die Kommutatorgruppe von G_k.*

Beweis. $\bar{k}$ sei die algebraisch abgeschlossene Hülle von k, Z das Zentrum von G. Dann gilt $G_k < G_{\bar{k}} = f(E_k)\, Z_{\bar{k}}$. Schreibt man demgemäß $x \in G_k$ in der Form $x = f(y)\, z$, so gilt für jeden Automorphismus σ von $\bar{k}$ über k die Gleichung $f(y^\sigma)\, z^\sigma = f(y)\, z$, also $y^\sigma = y a_\sigma$ mit $f(a_\sigma) \in F \cap Z$, also a_σ im Zentrum von F. Sind nun $x_1, x_2 \in G_k$ mit entsprechenden Zerlegungen, so folgt

$$x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = f(y_1 y_2 y_1^{-1} y_2^{-1}) \text{ und } (y_1 y_2 y_1^{-1} y_2^{-1})^\sigma = y_1 y_2 y_1^{-1} y_2^{-1},$$

also $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \in f(E_k)$.

Den Satz 6. 1 kann man dazu benützen, Klassenzahlen verschiedener Arten zu berechnen. Es handelt sich dabei jeweils darum, für eine gegebene Gruppe G und die Menge S aller unendlichen Stellen, die Adelgruppe G_A in zweiseitige Klassen modulo $G_k G_S$ und einer offenen Untergruppe zu zerlegen und die Anzahl der Klassen zu bestimmen. Wegen der Offenheit des einen Faktors kann man $G_k G_S$ durch seine abgeschlossene Hülle ersetzen. Wenn F_S nicht kompakt (das Problem also in gewissem Sinne indefinit) ist, so kann man nach Satz 6. 1 Faktoren vertauschen und hat damit die Bestimmung der Klassenzahl zurückgeführt auf die Berechnung eines Gruppenindex; Beispiele hierfür finden sich in [6], Satz 2, [12], Satz 2 und [21], 5. 24 und 6. 14.

7. Anhang: Einfach zusammenhängende Gruppen

k sei ein Körper der Charakteristik 0. Alle vorkommenden Gruppen sollen über k definiert sein. Eine Überlagerung ist eine Isogenie zwischen zusammenhängenden Gruppen; sie heiße echt, wenn der Kern von $\{1\}$ verschieden ist. Eine Gruppe heißt einfach zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist und keine echte Überlagerung besitzt.

Hilfssatz 7. 1. *Ist N ein Normalteiler von G, und sind N und G/N einfach zusammenhängend, so auch G.*

Beweis. Sei G^0 die Zusammenhangskomponente von G. Da N und G/N zusammenhängend sind, folgt $N \leqq G^0$ und $G^0/N = G/N$, also $G = G^0$. Ist $f: F \to G$ eine Überlagerung, M die Zusammenhangskomponente von $\overset{-1}{f}(N)$, so ist $f \mid M$ eine Überlagerung, hat also den Kern $\{1\}$. Weiter ist die induzierte Abbildung $F/M \to G/N$ ebenfalls eine Überlagerung, hat also auch den Kern $\{1\}$. Es folgt $\ker f = \{1\}$.

Hilfssatz 7. 2. *Ist N ein zusammenhängender Normalteiler von G, und hat G keine echte über k definierte Überlagerung, so gilt dasselbe von G/N.*

Beweis. $f: F \to G/N$ sei eine über k definierte Überlagerung, $g: G \to G/N$ die kanonische Abbildung, $H = \{(x, y) \in F \times G \mid f(x) = g(y)\}$ und $h(x, y) = y$. $h: H \to G$ ist eine Isogenie mit Kern $\ker(f) \times \{1\}$. Die Projektion $(x, y) \to x$ von H auf F hat den Kern N. Da F und N zusammenhängend sind, ist es auch H, und es folgt $\ker h = \{(1, 1)\}$, also $\ker f = \{1\}$.

Hilfssatz 7. 3. *Hat die zusammenhängende Gruppe G keine über k definierte echte Überlagerung, so ist ihr Radikal N unipotent, und G/N und G sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. U sei das unipotente Radikal von G. Nach Hilfssatz 7. 2 hat auch G/U keine echte über k definierte Überlagerung. Wir können also ohne Einschränkung G reduktiv voraussetzen. Die Kommutatorgruppe DG ist zusammenhängend; also hat auch

G/DG keine echte über k definierte Überlagerung. Andererseits ist G/DG ein zum Radikal N von G isogener Torus, der durch $x \to x^n$ sich selbst überlagert werden kann. Es folgt $G/DG = \{1\}$, also $N = \{1\}$. Ist nun $F \to G/N$ die bis auf k-Isomorphie eindeutig bestimmte über k definierte einfach zusammenhängende Überlagerung ([3] exp. 23, [18] Thm. 1. 1), so muß diese eine Isomorphie sein. G/N und nach Hilfssatz 7. 1 auch G sind also einfach zusammenhängend.

Eine halbeinfache Gruppe G heiße fast-einfach (bzw. k-fast-einfach), wenn G keinen echten zusammenhängenden Normalteiler (bzw. keinen, der über k definiert ist) besitzt.

Hilfssatz 7. 4. *Jede einfach zusammenhängende halbeinfache Gruppe G ist direktes Produkt k-fast-einfacher einfach zusammenhängender Gruppen.*

Beweis. G ist das Produkt gewisser elementweise vertauschbarer fast-einfacher Normalteiler G_i, die über der algebraisch abgeschlossenen Hülle von k, also auch schon über einer endlichen galoisschen Erweiterung K von k definiert sind ([3] exp. 17). Die Abbildung $(x_i) \to \prod_i x_i$ von $\prod_i G_i$ in G ist eine Überlagerung, also ein Isomorphismus, und da G einfach zusammenhängend ist, sind es auch die G_i. Die G_i sind die einzigen fast-einfachen Normalteiler von G. Also werden sie durch die Galoisgruppe g von K/k untereinander permutiert. Die Produkte der G_i aus einem Transitivitätsgebiet sind dann die gesuchten k-fast-einfachen Faktoren von G.

Hilfssatz 7. 5. *Jede k-fast-einfache einfach zusammenhängende Gruppe G entsteht aus einer fast-einfachen einfach zusammenhängenden Gruppe über einem Oberkörper l von k durch Restriktion des Grundkörpers* ([24], § 1. 3).

Beweis. Mit denselben Bezeichnungen wie oben sei h die Untergruppe von g, die eines der G_i, etwa G_1 in sich transformiert, und l der zugehörige Zwischenkörper. Dann ist G_1 über l definiert, und die G_i sind gerade die Konjugierten von G_1 unter den verschiedenen Isomorphismen σ_i von l in K. Ist p die Injektion von G_1 in G, so ist (p^{σ_i}) ein Isomorphismus zwischen $\prod_i G_1^{\sigma_i}$ und G, und das beweist die Behauptung.

Literatur

[1] *A. Borel*, Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Inst. Hautes Ét. Sci., Paris, no. 16 (1963).

[2] *C. Chevalley*, Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J. **7** (1955), 14—66.

[3] *C. Chevalley*, Classification des groupes de Lie algébriques, Sém. Ec. Norm. Sup., Paris, 1958.

[4] *M. Deuring*, Algebren, Ergebnisse d. Math., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1935.

[5] *J. Dieudonné*, La géométrie des groupes classiques, 2. Aufl., Ergebnisse d. Math., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

[6] *M. Eichler*, Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen, J. reine u. angew. Math. **179** (1938), 227—251.

[7] *M. Eichler*, Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter, Math. Zeitschrift **55** (1951/52), 216—252.

[8] *M. Eichler*, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

[9] *R. Godement*, Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques, Sém. Bourbaki, no. 257 (1962/63).

[10] *T. Honda*, Isogenies, rational points and section points of group varieties, Jap. J. of Math. **30** (1960), 84—101.

[11] *K. Iwasawa*, On the rings of valuation vectors, Ann. of Math. **57** (1953), 331—356.

[12] *M. Kneser*, Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen, Archiv d. Math. **7** (1956), 323—332.

[13] *M. Kneser*, Approximationssätze für algebraische Gruppen, J. reine u. angew. Math. **209** (1962), 96—97.

[14] *M. Kneser*, Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, Coll. Théorie des Groupes Algébriques, Bruxelles 1962.

[15] *M. Kneser*, Einfach zusammenhängende algebraische Gruppen in der Arithmetik, Int. Cong. Math., Stockholm 1962.

[16] *P. J. Lamont*, Approximation theorems for the group G_2. Indagationes Mathematicae **26** (1964), 187—191.

[17] *S. Lang*, Algebraic groups over finite fields, Amer. J. of Math. **78** (1956), 555—563.

[18] *T. Ono*, On the relative theory of Tamagawa numbers. Erscheint in den Annals of Mathematics.

[19] *A. Ostrowski*, Über algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen, Math. Zeitschr. **37** (1933), 98—133.

[20] *J.-P. Serre*, Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires, Coll. Théorie des Groupes Algébriques, Bruxelles 1962.

[21] *G. Shimura*, Arithmetic of unitary groups, Annals of Math. **79** (1964), 369—409.

[22] *R. Steinberg*, Variations on a theme of Chevalley, Pacific J. of Math. **9** (1959), 875—891.

[23] *R. Steinberg*, The simplicity of certain groups, Pacific J. of Math. **10** (1960), 1039—1041.

[24] *A. Weil*, Adeles and algebraic groups, Institute for Advanced Study, Princeton 1961.

[25] *A. Weil*, Algebras with involutions and the classical groups, J. Ind. Math. Soc. **24** (1961), 589—623.

Eingegangen 28. Juni 1964

Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization

By *P. Kustaanheimo* and *E. Stiefel*

Abstract

A regularization of Kepler motion in the three-dimensional space R^3 is developed using a simple mapping of a four-dimensional space R^4 onto R^3. In R^4 the equations of any undisturbed Kepler motion are linear differential equations with constant coefficients thus remaining completely regular at the center of attraction. This agreeable property of the equations makes them well suited for computation of perturbations. Many classical theories of perturbations in rectangular coordinates begin with a linearization of the equations of motion. In our theory such a preconditioning of the problem is avoided since the equations in R^4 are already linear. From a practical point of view it may be a disadvantage that the regularized methods require more integrations than the classical procedures.

The paper was written during P. Kustaanheimo's stay at the ETH Zürich in summer 1964. No knowledge of spinors is needed for understanding the paper. The authors are indebted to IBM for sponsoring this work.

1. Levi Civita's regularization of the plane motion

Let $z = x_1 + ix_2$ be the plane of the orbit of a moving body. For regularization purposes Levi-Civita proposed in [1] to introduce a *parameter-plane* $w = u_1 + iu_2$ mapped onto the *physical z-plane* conformally by the transformation

$$z = w^2, \quad \text{or} \quad \begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 \\ x_2 &= 2u_1u_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Accordingly parabolic coordinates are introduced in the physical plane. A conical section centered at the origin of the w-plane is transformed into a conical section of the z-plane having one focus at the origin; therefore the transformation is a very practical method for the discussion of a Kepler motion.

In order to get an idea about a generalization of such transformations in higher dimensional spaces, we observe the transformation of the differentials

$$dx_1 = 2(u_1du_1 - u_2du_2), \; dx_2 = 2(u_2du_1 + u_1du_2) \tag{2}$$

attached to the transformation of the coordinates. In matrix notation this can be written as

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

The matrix of this linear transformation has the following basic properties.

1. Each element is a homogeneous linear function of the parameters u_1, u_2.

In our case the elements are very trivial functions of this type because only one parameter appears in each element. However this specialisation is not essential. As a matter of fact it disappears if other cartesian coordinate-systems are used in the two planes.

2. The matrix is orthogonal. The scalar product of the two lines vanishes and each line has the norm $(u_1^2 + u_2^2)$. From this it follows

$$dx_1^2 + dx_2^2 = 4(u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2). \tag{4}$$

Property 2 is essentially equivalent to the fact that the mapping is conformal. The local ratio of magnification is

$$2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

as follows from (4).

2. Generalizations

We want to investigate whether an analogous situation is possible in the n-dimensional space R^n. Let $u_1, u_2, \ldots, u_n$ be rectangular coordinates in R^n. A matrix A with n rows and columns is desired with properties analogous to 1, 2 that is

1. The elements are linear homogeneous functions of the u_i.
2. The matrix is orthogonal in the following sense:

a) The scalar product of two different rows vanishes.

b) Each row has the norm $(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)$.

A famous result of A. Hurwitz [2] states that such a matrix can only be produced if $n = 1, 2, 4$ or 8. This problem was later studied and generalized by many authors [3—6]. The case $n = 1$ is trivial, the case $n = 2$ was discussed above. Unfortunately the case $n = 3$ is out of question; therefore there is no easy generalization of Levi-Civita's transformation in R^3. Hence we proceed to the case $n = 4$. A matrix satisfying our desires is for example

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}.$$

This matrix is intimately connected with the rule of multiplication of quaternions, but we do not want to develop this relation further in this article. In order to establish the relations analogous to (3), we multiply A from the right by the column of the du_i. The following 4 differential forms are obtained.

$$\begin{aligned} &2(u_1 du_1 - u_2 du_2 - u_3 du_3 + u_4 du_4) \\ &2(u_2 du_1 + u_1 du_2 - u_4 du_3 - u_3 du_4) \\ &2(u_3 du_1 + u_4 du_2 + u_1 du_3 + u_2 du_4) \\ &2(u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4). \end{aligned} \tag{5}$$

A disappointment should be noticed here. Only the first three forms are complete differentials and may be denoted by dx_1, dx_2, dx_3. By integration we obtain

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ x_2 &= 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) \\ x_3 &= 2(u_1 u_3 + u_2 u_4). \end{aligned} \tag{6}$$

This is a mapping of the space R^4 onto the space R^3 of the x_i and it is essentially the regularizing transformation proposed by Kustaanheimo [7] as an outgrowth of his research in the theory of spinors. We take now care of the last line of (5) by subjecting the differentials du_i to the condition of annihilating this line:

$$u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4 = 0. \tag{7}$$

Taking into account this restriction, we concentrate again our differential relations into the matrix equation

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Furthermore the mapping (6) of the coordinates is expressible by using the same matrix as follows.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(The product of the last line of the matrix with the u-column is identically 0).

We did not succeed in defining a Levi-Civita transformation mapping two 4-dimensional spaces onto each-other. But we found a mapping of R^4 onto R^3 having the desired behaviour. Being faced with the study of motions in R^3, this is exactly what we want. The only difficulty which may arise stems from the side-condition (7). But this condition is harmless as we will show in the sequel.

3. Geometric properties of the transformation

Among the many interesting properties of the mapping (6), (9) we list some that are important for the remaining discussion.

a) The u_1, u_2-plane of the parametric space R^4 is mapped onto the x_1, x_2-plane of the physical space R^3 according to the rules (1), (3) of Levi-Civita. Thus our transformation is a continuation of Levi-Civita's transformation.

b) The following properties are important for establishing the analytical dynamics in R^3. From (8) and the orthogonality of the matrix we have

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2). \tag{10}$$

The same argument applied to (9) shows

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)^2, \tag{11}$$

or

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = r, \tag{12}$$

where r is the radial distance in R^3. Hence, r is the square of the distance in R^4. The equation (10) then becomes

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 4r(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2), \tag{13}$$

but this holds only true if the differentials satisfy relation (7).

c) Inverse transformation. If the point u_i of R^4 is mapped onto x_k of R^3, all points v_i satisfying

$$(14)\qquad \begin{aligned} v_1 &= u_1 \cos\varphi - u_4 \sin\varphi \qquad & v_2 &= u_2 \cos\varphi + u_3 \sin\varphi \\ v_4 &= u_1 \sin\varphi + u_4 \cos\varphi \qquad & v_3 &= -u_2 \sin\varphi + u_3 \cos\varphi \end{aligned}$$

are mapped onto the same point x_k. The angle φ is arbitrary. The image of a point in R^3 is therefore a circle of radius $\sqrt{r}$ in the parameter-space R^4. The tangent vector to this circle at the point u_i is

$$(15)\qquad (-u_4,\ u_3,\ -u_2,\ u_1).$$

Thus, the relation (7) postulates that the infinitesimal vector du_j attached to the point u_i should be orthogonal to the circle passing through this point. The one-parametric subgroup (14) of the rotation group in R^4 will be called the *kernel* of our transformation.

It is not too difficult to invert the formulae (6) of transformation. Solve for instance the last two for u_2, u_3 and insert the result into the first. A quadratic equation for $(u_1^2 + u_4^2)$ is obtained. Finally the set of formulae on the left-hand side of the following table appears.

$$(16)\qquad \begin{aligned} u_1^2 + u_4^2 &= \frac{1}{2}(x_1 + r) \qquad & u_2^2 + u_3^2 &= \frac{1}{2}(-x_1 + r) \\ u_2 &= \frac{x_2 u_1 + x_3 u_4}{x_1 + r} \qquad & u_1 &= \frac{x_2 u_2 + x_3 u_3}{-x_1 + r} \\ u_3 &= \frac{x_3 u_1 - x_2 u_4}{x_1 + r} \qquad & u_4 &= \frac{x_3 u_2 - x_2 u_3}{-x_1 + r}. \end{aligned}$$

The set on the right side is an alternative to be used if x_1 is negative. The formulae in the first line determine two of the u_i up to a rotation (14). The remaining u_k follow from the formulae below.

After having computed one of the images of a point in R^3 from (16), the image of an infinitesimal vector dx_k attached to the point is determined unambiguously provided the side-condition (7) is required. In order to prove this, it is sufficent to solve the linear equations (8) for the du_i, taking advantage from the orthogonality of the matrix. The result is

$$(17)\qquad \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

and (7) is satisfied.

d) Without going much into detail, we state the following facts. Let us consider a point u_i in R^4 and a family of curves radiating out from this point and constructed in such a way that the initial tangents du_i satisfy (7). These tangents span a 3-dimensional space orthogonal to the circle belonging to the kernel and passing through the given point. This family is mapped onto curves in R^3 with conservation of the angles at the given point u_i. This follows again from the orthogonality of the matrix A in formula (8). Obviously our mapping is as conformal as a mapping of an R^4 onto an R^3 ever can be.

Finally we consider two vectors u_i, v_i in R^4 spanning a plane R^2 through the origin and satisfying

$$(18)\qquad u_4 v_1 - u_3 v_2 + u_2 v_3 - u_1 v_4 = 0.$$

This is a modification of the condition (7). The same relation holds true for any pair of vectors of R^2. This plane is mapped conformally onto a plane of R^3 and moreover the mapping is of Levi-Civita's type; i. e. distances from the origin are squared and angles at the origin are doubled.

To prove this, we take for u_i, v_i two orthogonal unit-vectors building a cartesian coordinate-system in R^2. The orthogonality relation

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 = 0$$

yields together with (18) a system of two linear equations for the v_i. Its general solution is

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 \cos\omega + u_3 \sin\omega & v_2 &= -u_1 \cos\omega + u_4 \sin\omega \\ v_4 &= -u_2 \sin\omega + u_3 \cos\omega & v_3 &= -u_1 \sin\omega - u_4 \cos\omega, \end{aligned} \tag{19}$$

taking into account that the two vectors must have equal length.

ω is an angle depending on the position of the plane R^2. Consider a point be given in R^2 having polar coordinates ϱ, ϑ with respect to this coordinate system in R^2. After some straightforward computation the image of this point in R^3 is found to be

$$x = \varrho^2[a \cos 2\vartheta + (b \cos\omega + c \sin\omega) \sin 2\vartheta], \tag{20}$$

where x is the position vector x_i and a, b, c are abbreviations for the columns of the matrix

$$\begin{matrix} u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 & 2(u_1 u_2 + u_3 u_4) & 2(u_1 u_3 - u_2 u_4) \\ 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) & -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 & 2(u_1 u_4 + u_2 u_3) \\ 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) & 2(u_2 u_3 - u_1 u_4) & -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2. \end{matrix} \tag{21}$$

The orthogonality of this matrix follows from the well-known Cayley parametrisation of the rotations in the 3-dimensional space. Thus the two vectors a and $(b \cos\omega + c \sin\omega)$ appearing in (20) are orthogonal unit-vectors. This proves our statement.

The first column a of (21) is of course the image of the point u_i, as can be seen from (6). Therefore our mapping could also be established by the use of Cayley's parametrisation.

From our discussion of the mapping of such a special plane R^2 in R^4 it becomes clear, that any conical section lying in R^2 and centered at the origin is mapped on another conical section of the physical space R^3 having one focus at the origin. In particular a straight line in R^2 is transformed into a parabola.

This result brings out the deeper reason for the fact that our transformation is very appropriate for the study of the 3-dimensional Kepler motion.

4. The equations of motion

Let m be a point of mass m moving along in R^3 on a path $x_k(t)$ with time t and let P_k be the components of the acting force. The velocity-vector will be denoted by $\dot{x}_k$ and the magnitude of the velocity by v. The equations of motion are

$$m \ddot{x}_k = P_k. \tag{22}$$

Our goal is to establish a corresponding motion $u_i(t)$ in R^4 in such a way that the condition (7) or

$$u_4 \dot{u}_1 - u_3 \dot{u}_2 + u_2 \dot{u}_3 - u_1 \dot{u}_4 = 0 \tag{23}$$

is satisfied at any time for the position u_i and the velocity $\dot{u}_i$ of this 4-dimensional motion. We shall not discuss here the feasibility of such a construction but proceed directly to the differential equations of the motion in R^4. Afterwards it can be verified that our goal has been reached.

In order to start this line of approach we regard the parameters u_i as generalized coordinates for the motion of the particle m in the sense of Lagrangian mechanics. Their relation to the ordinary coordinates x_k is given by (6). There is no contradiction in introducing 4 Lagrangian coordinates for this motion of 3 degrees of freedom, since the u_i must satisfy the non-holonomic relation (23). The velocity v of m is given by formula (13):

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = 4r(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2), \tag{24}$$

r being the distance of m from the origin, and

$$r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \tag{25}$$

as follows from (12). The kinetic energy of m is therefore

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = 2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2). \tag{26}$$

Next we have to compute the generalized forces Q_i corresponding to the generalized coordinates u_i. They are defined by the requirement that the work done by the forces remains invariant under the transformation:

$$\sum_{k=1}^{3} P_k dx_k = \sum_{i=1}^{4} Q_i du_i. \tag{27}$$

Hence the Q_i are obtained by the transformation which is contragredient to the transformation of the differentials; this is obtained by application of the transposed matrix in (8):

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_4 \\ -u_3 & -u_4 & u_1 \\ u_4 & -u_3 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

By inserting the expressions (25) and (26) into the Lagrangian equations of motion

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{29}$$

we obtain

$$4m\left[\frac{d}{dt}(r\dot{u}_i) - u_i(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2)\right] = Q_i. \tag{30}$$

This set of equations enables us to define the corresponding motion in R^4. Let x_k^0 and $\dot{x}_k^0$ be the initial position and velocity of m at the time $t = 0$. We compute a point u_i^0 in R^4 corresponding to x_k^0 by (16). Furthermore an initial velocity $\dot{u}_i^0$ is computed by (17) or

$$\begin{aligned} \dot{u}_1^0 &= \frac{1}{2r_0}(u_1^0 \dot{x}_1^0 + u_2^0 \dot{x}_2^0 + u_3^0 \dot{x}_3^0) \\ \dot{u}_2^0 &= \frac{1}{2r_0}(-u_2^0 \dot{x}_1^0 + u_1^0 \dot{x}_2^0 + u_4^0 \dot{x}_3^0) \\ \dot{u}_3^0 &= \frac{1}{2r_0}(-u_3^0 \dot{x}_1^0 - u_4^0 \dot{x}_2^0 + u_1^0 \dot{x}_3^0) \\ \dot{u}_4^0 &= \frac{1}{2r_0}(u_4^0 \dot{x}_1^0 - u_3^0 \dot{x}_2^0 + u_2^0 \dot{x}_3^0), \end{aligned} \tag{31}$$

thus making sure that condition (23) is satisfied at instant $t = 0$. Here r_0 is the distance at $t = 0$. Then the corresponding motion is defined by the differential equations (30) and the initial conditions u_i^0, $\dot{u}_i^0$. In order to prove that this motion in R^4 is mapped onto the given motion in R^3 it is important to show that condition (23) is satisfied at any time. For this purpose we multiply the Lagrangian equations (30) by u_4, $-u_3$, u_2, $-u_1$ respectively and add. The result is

$$4m\left[u_4\frac{d}{dt}(r\dot{u}_1) - u_3\frac{d}{dt}(r\dot{u}_2) + u_2\frac{d}{dt}(r\dot{u}_3) - u_1\frac{d}{dt}(r\dot{u}_4)\right] = u_4Q_1 - u_3Q_2 + u_2Q_3 - u_1Q_4.$$

Since definition (28) of the generalized forces implies that the right side of this equation vanishes, we have

$$4m\frac{d}{dt}[r(u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4)] = 0.$$

Integrating this equation we obtain

$$r(u_4\dot{u}_1 - u_3\dot{u}_2 + u_2\dot{u}_3 - u_1\dot{u}_4) = \text{const.}$$

By appropriate choice of the initial conditions we have annihilated this expression at instant $t = 0$; thus it vanishes for all values of time.

The final steps of the proof are left to the reader. He should take equations (23), (28) and (30) as hypothesis and verify by explicit computation that the coordinates x_k defined by (6) satisfy the given equations (22) of motion. Then our correspondence between motions in R^3 and R^4 is established.

5. Regularization

Equations (30) are singular at the origin. In order to remove this singularity we introduce the work W done by the forces. It follows from (27) that this work is computable by either of the two expressions

$$W = \int \sum_{k=1}^{3} P_k dx_k, \quad W = \int \sum_{i=1}^{4} Q_i du_i. \tag{32}$$

The lower limit of integration is the start of the motion at time $t = 0$; since the work W is the increase of the kinetic energy, formula (26) yields

$$2mr(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2 + \dot{u}_4^2) - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \tag{33}$$

where v_0 is the initial velocity in the physical space R^3. Inserting this result into (30) we obtain

$$4m\frac{d}{dt}(r\dot{u}_i) - \frac{1}{r}(2W + mv_0^2)\,u_i = Q_i. \tag{34}$$

Furthermore a *regularizing* time s is introduced by

$$s = \int \frac{dt}{r}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{ds}. \tag{35}$$

The lower limit of integration is again $t = 0$. With respect to s as independent variable the equations of motion in R^4 become

$$4m\frac{d^2u_i}{ds^2} - (2W + mv_0^2)\,u_i = rQ_i. \tag{36}$$

We note that the singularity has disappeared. Obviously we must adapt the initial conditions (31) to the regularizing time. Hence we have at instant $t = 0$

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
\frac{du_1}{ds} &= \frac{1}{2}(u_1^0\dot{x}_1^0 + u_2^0\dot{x}_2^0 + u_3^0\dot{x}_3^0)\\
\frac{du_2}{ds} &= \frac{1}{2}(-u_2^0\dot{x}_1^0 + u_1^0\dot{x}_2^0 + u_4^0\dot{x}_3^0)\\
\frac{du_3}{ds} &= \frac{1}{2}(-u_3^0\dot{x}_1^0 - u_4^0\dot{x}_2^0 + u_1^0\dot{x}_3^0)\\
\frac{du_4}{ds} &= \frac{1}{2}(u_4^0\dot{x}_1^0 - u_3^0\dot{x}_2^0 + u_2^0\dot{x}_3^0).
\end{aligned}
$$

The regularized equations (36) are practical in the *conservative* case where the forces have a potential V depending only on the position of the moving body and not depending explicitly on time. Thus we may write

$$
(38)\qquad W = V_0 - V, \quad Q_i = -\frac{\partial V}{\partial u_i},
$$

V_0 being the potential at time $s = 0$.

However if the problem at hand is not conservative, it is better to restrict ourselves to introducing the regularizing time in the original equations (30) without using the work W. This alternative leads to the equations

$$
4m\left[\frac{d^2u_i}{ds^2} - \frac{u_i}{r}\Sigma\left(\frac{du_j}{ds}\right)^2\right] = rQ_i.
$$

From (24) and (35) we have

$$
(39)\qquad v^2 = \frac{4}{r}\Sigma\left(\frac{du_j}{ds}\right)^2.
$$

Hence

$$
(40)\qquad m\left[4\frac{d^2u_i}{ds^2} - v^2u_i\right] = rQ_i.
$$

The reader should note that in all equations concerning motions in R^4 the letters r, v are abbreviations for the expressions

$$
(41)\qquad r = \Sigma u_j^2, \quad v^2 = \frac{4}{r}\Sigma\left(\frac{du_j}{ds}\right)^2.
$$

With respect to the corresponding motion in R^3 the same quantities r, v are the distance and velocity of the moving body.

6. Kepler motion

Assume a central attracting mass at rest at the origin of R^3 and denote by M the product of that mass and the gravitational constant. Let our mobile be subjected to this central attraction and perturbing forces P'_k. We compute the generalized forces in R^4 corresponding to the central attraction from the potential

$$
-\frac{mM}{r}
$$

by the use of formula (38). Taking (41) into account the central attraction is

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{m\,M}{r}\right) = -\frac{2\,m\,M}{r^2}\,u_i.$$

The perturbing forces Q_i' in R^4 are given by the transformation (28) applied to the perturbing forces P_k'. Putting things together we have

$$Q_i = -\frac{2\,m\,M}{r^2}\,u_i + Q_i'. \tag{42}$$

The work W breaks up into the work

$$m\,M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

done by the central attraction and the work W' done by the perturbations,

$$W = m\,M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + W'. \tag{43}$$

Inserting (42) and (43) into (36) we obtain the equations

$$m\left[4\,\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \left(\frac{2\,M}{r_0} - v_0^2\right) u_i\right] = r Q_i' + 2 W' u_i \tag{44}$$

for the perturbed Kepler motion. The right hand side depends only on the perturbations. The constant factor of u_i in the left hand side is taken into account by introducing the notation

$$\frac{1}{a_0} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{M}. \tag{45}$$

It follows from the classical theory that a_0 is the semi-major axis of the unperturbed osculating Kepler motion at instant $t = 0$. Hence

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \frac{M}{4\,a_0}\,u_i = \frac{1}{4\,m}\,(r Q_i' + 2 W' u_i). \tag{46}$$

This set of differential equations is completely regular at the origin. Even if a trajectory collides with the central mass it is computable by integrating (46). If this integration is performed by numerical methods, the use of the regularizing time has an agreeable smoothing effect. This can be seen from (35) since a constant step in s generates a small step in t if the mobile approaches the origin.

Once more we emphasize the special case of conservative perturbing forces. The work W' is then given by the perturbing potential. This situation occurs for instance if the perturbations of a satellite arising from the asphericity of the earth are wanted and if only zonal harmonics are taken into account. Moreover, many problems of first order secular perturbations in the solar system may be computed by means of a conservative potential.

In a non-conservative case we may use (40) and (42) and establish the equations

$$m\left[4\,\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \left(\frac{2\,M}{r} - v^2\right) u_i\right] = r Q_i'. \tag{47}$$

The analogy to equation (44) is obvious; but here the coefficient of u_i is no longer constant. We shall take care of this difficulty later on.

7. The initial value problem

In order to get acquainted with this theory of Kepler motion, we discuss in this section the unperturbed motion. The corresponding equations (46) are

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \frac{M}{4a_0} u_i = 0. \tag{48}$$

They are *linear* differential equations with *constant coefficients*. This appears to be a remarkable advantage of the method. The image-point in R^4 moves as if it were connected with the origin by an elastic string of rigidity $M/4a_0$. Its path is a conical section centered at the origin. Without much loss of generality we shall assume $a_0 > 0$ (elliptic motion) and introduce temporarily a frequency ω defined by

$$\omega^2 = \frac{M}{4a_0}. \tag{49}$$

Integrating equations (48) we have

$$u_i = \alpha_i \cos \omega s + \beta_i \sin \omega s, \tag{50}$$

where α_i, β_i are two sets of constants ($i = 1, 2, 3, 4$) to be determined from the initial conditions. These conditions are specified in the following way. Let x_k^0 and $\dot{x}_k^0$ be initial position and velocity in R^3 and denote by ϑ the angle between these two vectors and by r_0, v_0 the initial distance and magnitude of velocity. A corresponding position and velocity in R^4 are computed from (16) and (37). The two vectors so obtained are α_i and $(\omega\beta_i)$. This follows from (50). Moreover (41) yields

$$\Sigma \alpha_j^2 = r_0, \quad \Sigma \beta_j^2 = \frac{r_0 v_0^2}{4\omega^2}. \tag{51}$$

After computation of the α_i, β_i formula (50) furnishes the motion in R^4 and the mapping (6) gives the desired motion in R^3. Thus we have solved the initial-value problem under consideration.

Since the motion is obtained as a function of the regularizing time s, the problem of finding the position at a given instant t must still be solved. In order to do this, we first observe that the initial position α_i and velocity $(\omega\beta_i)$ span again the angle ϑ since the plane of motion is mapped conformally into R^3. This was proved in section 3, d). Hence the scalar product of the vectors α_i, β_i is

$$\Sigma \alpha_j \beta_j = \frac{r_0 v_0}{2\omega} \cos \vartheta \tag{52}$$

as follows from (51). Next we compute from (50) the distance r taking into account (51), (52).

$$\begin{aligned} r = \Sigma u_j^2 &= r_0 \cos^2 \omega s + \frac{r_0 v_0^2}{4\omega^2} \sin^2 \omega s + \frac{r_0 v_0}{\omega} \cos \vartheta \cdot \sin \omega s \cos \omega s \\ &= r_0 - r_0 \left(1 - \frac{v_0^2}{4\omega^2}\right) \sin^2 \omega s + \frac{r_0 v_0}{\omega} \cos \vartheta \cdot \sin \omega s \cos \omega s. \end{aligned}$$

From the definition (35) of the regularizing time we obtain

$$\begin{aligned} t = \int r\,ds &= r_0 s - \frac{r_0}{4\omega}\left(1 - \frac{v_0^2}{4\omega^2}\right)(2\omega s - \sin 2\omega s) \\ &\quad + \frac{r_0 v_0}{4\omega^2} \cos \vartheta (1 - \cos 2\omega s). \end{aligned} \tag{53}$$

This equation must be solved for s. In order to facilitate this task K. Stumpff, in his textbook [8] on celestial mechanics, introduces the slowly varying functions of an angle λ

$$c_2(\lambda^2) = \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2}, \quad c_3(\lambda^2) = \frac{\lambda - \sin\lambda}{\lambda^3}.$$

Hence

$$\frac{t}{r_0} = s - \frac{1}{2}(4\omega^2 - v_0^2)\, s^3 c_3 + v_0 \cos\vartheta \cdot s^2 c_2,$$

the argument of the c-functions being $\lambda^2 = 4\omega^2 s^2$. By replacing ω by (49) we obtain the equation

$$(54) \qquad s + \frac{1}{2}\left(v_0^2 - \frac{M}{a_0}\right) s^3 c_3(\lambda^2) + v_0 \cos\vartheta\, s^2 c_2(\lambda^2) = \frac{t}{r_0}, \quad \lambda^2 = \frac{M}{a_0}\, s^2.$$

This is Stumpff's "principal equation" of the two-body problem. Numerical methods for solving it are outlined in [8]. The angle $\lambda = 2\omega s$ is the increment of the eccentric anomaly. A value of t computed by (54) from a given value of s in the sequel will be called "Kepler time" and denoted by t_K.

Obviously the parametric space R^4 has disappeared from the equation (54); it was only needed as a tool for establishing that equation. It would not be too difficult to establish by the same technique the remaining formulae of Stumpff; they describe the motion of our particle without using R^4. We shall not carry this out, but we may mention the shortest way leading to the desired result. One uses the fact that the plane of motion in R^4 is mapped into R^3 in Levi-Civita's style. That is to say, distances are squared and angles at the origin are doubled.

Finally it is also possible to determine the size and shape of the Kepler ellipse in R^3. From the parametric equations (50) the principal axis of the ellipse in R^4 are computed by elementary methods of analytic geometry. The endpoint of the minor semi-axis is mapped onto the pericentre and the endpoint of the major semi-axis onto the apocentre of the Kepler ellipse.

The results of this section illustrate the fact that many formulae of celestial mechanics are better understood and easier established if they are interpreted as formulae in the parametric space R^4.

8. First order perturbations

The equations (46) or (47) of the perturbed motion can be solved by numerical methods using for instance a scheme of Runge-Kutta or Cowell type. If a non-conservative case is treated by (46) the work W' of the perturbing forces must be computed stepwise by numerical quadrature. This disadvantage will be removed in section 9.

We shall not proceed along this line of attack but rather adapt classical perturbation methods to our equations.

For the sake of simplicity the frequency (49) is used again and the right-hand side of (46) is abbreviated by

$$(55) \qquad F_i = \frac{1}{4m}(rQ_i' + 2W'u_i).$$

Equation (46) now becomes

$$(56) \qquad \frac{d^2 u_i}{ds^2} + \omega^2 u_i = F_i.$$

This is a forced harmonic oscillation in R^4. Integration is performed by the following well-known method. It is easy to prove that the functions

$$\varphi_i = \frac{1}{\omega} \int_0^s F_i \sin \omega (s - \sigma)\, d\sigma$$

are particular integrals of (56). For by differentiation we have

$$\frac{d\varphi_i}{ds} = \int_0^s F_i \cos \omega (s - \sigma)\, d\sigma$$

$$\frac{d^2\varphi_i}{ds^2} = F_i - \omega \int_0^s F_i \sin \omega (s - \sigma)\, d\sigma, \tag{57}$$

hence

$$\frac{d^2\varphi_i}{ds^2} = F_i - \omega^2 \varphi_i.$$

We again consider the initial-value problem, but for the case of perturbed motion. From the initial data x_k^0, $\dot{x}_k^0$ two vectors α_i, β_i in R^4 are computed as outlined in section 7. Then the perturbed motion is given by

$$u_i = \alpha_i \cos \omega s + \beta_i \sin \omega s + \varphi_i$$

or

$$u_i = \alpha_i \cos \omega s + \beta_i \sin \omega s + \frac{1}{\omega} \int_0^s F_i \sin \omega (s - \sigma)\, d\sigma, \tag{58}$$

because this expression satisfies the differential equations and the initial conditions as well. The term before the integral is the unperturbed Kepler motion, therefore we introduce the perturbations Δu_i of the coordinates and obtain

$$\Delta u_i = \frac{1}{\omega} \int_0^s F_i \sin \omega (s - \sigma)\, d\sigma. \tag{59}$$

By differentiation we obtain the perturbations of the velocities

$$\Delta \left(\frac{du_i}{ds} \right) = \int_0^s F_i \cos \omega (s - \sigma)\, d\sigma. \tag{60}$$

This set of formulae is appropriate if the perturbations are only wanted once at a given time s. If they must be listed as functions of s, we proceed in a slightly different manner by introducing the quantities

$$\Delta \alpha_i = -\frac{1}{\omega} \int_0^s F_i \sin \omega \sigma\, d\sigma$$

$$\Delta \beta_i = \frac{1}{\omega} \int_0^s F_i \cos \omega \sigma\, d\sigma. \tag{61}$$

Equations (59), (60), (58) then become

$$\Delta u_i = \Delta\alpha_i \cos \omega s + \Delta\beta_i \sin \omega s, \tag{62}$$

$$\Delta\left(\frac{du_i}{ds}\right) = \omega(-\Delta\alpha_i \sin \omega s + \Delta\beta_i \cos \omega s),$$

$$u_i = (\alpha_i + \Delta\alpha_i) \cos \omega s + (\beta_i + \Delta\beta_i) \sin \omega s. \tag{63}$$

Thus $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i$ are the perturbations of α_i, β_i and may be called perturbations of the elements if we agree to consider α_i, β_i as elements of the motion in the parametric space R^4.

We make the important remark that also the physical time t is influenced by the perturbing forces. In order to study this phenomenon we denote temporarily by u_{iK}, r_K the coordinates and distance during the unperturbed Kepler motion and by $\Delta u_i, \Delta r$ the corresponding perturbations.

From (35) it follows

$$t = \int r ds = \int r_K ds + \int \Delta r ds = t_K + \int \Delta r ds.$$

The Kepler time t_K was introduced in section 7. Thus we have the perturbation of time

$$\Delta t = \int \Delta r ds. \tag{64}$$

Δr is given by (41):

$$\Delta r = \Sigma(u_j^2 - u_{jK}^2)$$
$$= \Sigma(u_j + u_{jK})\,\Delta u_j.$$

We shall give some advice concerning the practical computation of perturbations. The perturbing functions F_i are in general given as functions of the position and velocity of the moving body, and of time. By differentiation of (61) the differential equations for the perturbations of the elements

$$\frac{d}{ds}(\Delta\alpha_i) = -\frac{1}{\omega} F_i \sin \omega s, \quad \frac{d}{ds}(\Delta\beta_i) = \frac{1}{\omega} F_i \cos \omega s$$

are obtained. They can be integrated by well-known numerical methods. Now we restrict ourselves to first order perturbations. That is to say the F_i are computed by inserting position and velocity of the unperturbed Kepler motion. If only special perturbations are desired the following procedure must be applied. A value s of the variable of integration is chosen. Position and velocity are computed from (50) and

$$\frac{du_i}{ds} = \omega(-\alpha_i \sin \omega s + \beta_i \cos \omega s).$$

The corresponding time is computed from (54) or from the less sophisticated formula (53). Then the F_i are evaluated and an integration step of (61) is performed. Formula (63) furnishes the trajectory in R^4. Afterwards the correction of time is obtained from the integral

$$\Delta t = 2\int \Sigma u_{jK} \Delta u_j ds. \tag{65}$$

This is sufficient for first order work.

If a theory of general perturbations must be established, the perturbing functions F_i must be expanded into Fourier series with respect to s, that is to say with respect to the eccentric anomaly of the unperturbed Kepler motion. In the case of a many-body

problem the corresponding technique was developed long ago by Hansen. The reader can find the necessary material in [9].

The labour of computing first order perturbations is reduced slightly if the coordinate system x_k in R^3 is chosen in such a manner that the unperturbed motion takes place in the x_1, x_2-plane. As the plane of the corresponding motion in R^4 we may take the u_1, u_2-plane. The two planes are mapped onto each other by Levi-Civita's transformation. The formulae (28) for the transformation of the perturbing forces P'_k in R^3 into forces Q'_i in R^4 are then reduced to

$$Q'_1 = 2(u_1 P'_1 + u_2 P'_2) \qquad Q'_3 = 2 u_1 P'_3$$
$$Q'_2 = 2(-u_2 P'_1 + u_1 P'_2) \quad Q'_4 = 2 u_2 P'_3.$$

This shows that the perturbations Δu_1, Δu_2 of the plane motion are computable without introducing u_3, u_4.

We have implicitly assumed the basic motion to be elliptic, but the necessary modifications for parabolic or hyperbolic motion are not too difficult. Finally we mention that higher order perturbations can also be treated by using the same ideas.

9. The non-conservative case

In this case the computation of the perturbing work W' can be avoided if the following more sophisticated regularization is used. We introduce the perturbing force per unit of mass

$$p_k = \frac{1}{m} P'_k, \quad q_i = \frac{1}{m} Q'_i. \tag{66}$$

By inserting (41) into (47) we obtain the equations of motion

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{M}{2} - \Sigma\left(\frac{du_j}{ds}\right)^2\right] u_i = \frac{r}{4} q_i.$$

A new time-variable s_1 is introduced by putting $s = f(s_1)$, where f is a function to be specified below. Derivatives with respect to s_1 are denoted by accents. The equations of motion become

$$u_i'' - \frac{f''}{f'} u_i' + \frac{1}{r}\left(\frac{M}{2} f'^2 - \Sigma u_j'^2\right) u_i = \frac{r}{4} f'^2 q_i. \tag{67}$$

Our goal is to determine f in such a way that the coefficient of u_i is a constant k:

$$k = \frac{1}{r}\left(\frac{M}{2} f'^2 - \Sigma u_j'^2\right), \quad f'^2 = \frac{2}{M}(rk + \Sigma u_j'^2). \tag{68}$$

With this convention the equations of motion may be written

$$u_i'' + k u_i = \frac{r}{4} f'^2 q_i + \frac{f''}{f'} u_i'. \tag{69}$$

Thus we need the second derivative f''. It is obtained by differentiation of (68) taking into account (41), and the fact that k is a constant:

$$f' f'' = \frac{2}{M} \Sigma u_j'(u_j'' + k u_j).$$

By inserting the equations of motion (69) this is transformed into

$$\frac{M}{2} f' f'' = \frac{r}{4} f'^2 \Sigma q_j u_j' + \frac{f''}{f'} \Sigma u_j'^2$$

or

$$\frac{f''}{f'}\left(\frac{M}{2} f'^2 - \Sigma u_j'^2\right) = \frac{r}{4} f'^2 \Sigma q_j u_j'.$$

Since the quantity k appears on the left side of this equation, we have

$$\frac{f''}{f'} = \frac{f'^2}{4k} \Sigma q_j u_j'.$$

Thus the equations (69) of motion become

$$u_i'' + k u_i = \frac{1}{4} f'^2 \left(r q_i + \frac{1}{k} u_i' \Sigma q_j u_j'\right).$$

Finally f'^2 is replaced by (68).

$$u_i'' + k u_i = \frac{1}{2M} (kr + \Sigma u_j'^2) \left(r q_i + \frac{u_i'}{k} \Sigma q_j u_j'\right). \tag{70}$$

This is our new set of differential equations for the perturbed motion. The right hand side vanishes with the perturbing forces, therefore the unperturbed motion is again a harmonic oscillation.

A few remarks concerning the necessary modifications in sections 7 and 8 are in order, if this set is used. We begin with the initial conditions. Introducing the velocity v in R^3 from (41) we obtain

$$u_i' = \frac{du_i}{ds} f', \quad \Sigma u_j'^2 = f'^2 \Sigma \left(\frac{du_j}{ds}\right)^2 = \frac{r}{4} f'^2 v^2,$$

$$k = \frac{1}{r}\left(\frac{M}{2} f'^2 - \Sigma u_j'^2\right) = \frac{M}{4} f'^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{M}\right).$$

At instant $t = 0$ the quantity in the last parenthesis is the reciprocal of the osculating major axis a_0. This was pointed out in (45).

$$k = \frac{M}{4a_0} f'^2, \quad f' = \sqrt{\frac{4a_0}{M} k}.$$

The initial velocity in R^4 is thus

$$u_i' = \sqrt{\frac{4a_0}{M} k} \, \frac{du_i}{ds}, \tag{71}$$

where the expressions du_i/ds are computed by (37). This shows that k should have the same sign as a_0. Its absolute value is arbitrary. But this relation shows furthermore that the new method breaks down for parabolic initial conditions, because a_0 is then infinite and k should be 0. But this is impossible because k occurs in the denominator of (70). For elliptic motion a good choice of k is

$$k = \frac{M}{4a_0}.$$

The initial conditions reduce to

$$u_i' = \frac{du_i}{ds}$$

and the rules (53), (54) for computing the Kepler time remain valid if s is replaced by s_1. The same statement is true for the perturbation formulae (59), (61) provided that F_i is understood to be the expression

$$F_i = \frac{1}{2M}(kr + \Sigma u_j'^2)\left(rq_i + \frac{1}{k}u_i' \Sigma q_j u_j'\right)$$

of equation (70), whereas the rule for the perturbation of time is modified to read

$$\Delta t = \int \Delta r ds = \int \Delta r f' ds_1 = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \Delta r \sqrt{kr + \Sigma u_j'^2} ds_1 .$$

An account on numerical experiments by M. Rössler will appear in ZAMP (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik).

References

[1] *T. Levi-Civita*, Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps, Opere matematiche, Vol. **2**, Bologna 1956.

[2] *A. Hurwitz*, Ueber die Komposition quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen, Math. Werke II, p. 565—571.

[3] *J. Radon*, Lineare Scharen orthogonaler Matrizen, Abh. Sem. Hamburg **1** (1923), 1—14.

[4] *P. Jordan*, J. v. Neumann, E. Wigner, On Algebraic Generalization of the Quantum Mechanic Formalism, Ann. of Math. **35** (1934), 29—64.

[5] *B. Eckmann*, Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen, Comm. Math. Helv. **15** (1943), 358—366.

[6] *E. Stiefel*, On Cauchy-Riemann Equations in Higher Dimensions, Journal of Research of the National Bureau of Standards, **48** (1952), 395—398.

[7] *P. Kustaanheimo*, Spinor Regularization of the Kepler Motion, Ann. Univ. Turkuens. A. I. **73** (1964); Publ. No. 102 of the Astronomical Observatory, Helsinki (1964).

[8] *K. Stumpff*, Himmelsmechanik, Bd. **1**, Berlin 1959, in particular p. 201ff.

[9] *H. v. Zeipel*, Entwicklung der Störungsfunktion, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, VI, 2. 13, in particular section 52.

Eingegangen 24. Juli 1964

Corrigendum to
Two problems concerning polynomials

H. Davenport and *A. Schinzel*

(this Journal, **214/215**, 386—391)

It has been pointed out by M. J. Wonenburger in Math. Reviews, **29** (1965), p. 18, that the conclusion of the proof of Theorem 2 needs modification.

The last complete paragraph on p. 390 should be omitted, and throughout the rest of the proof $x_1, x_2, 0, \ldots, 0$ should be replaced by $x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0$.

The assertion on p. 391 that $a(x_3, \ldots, y_s)$ is a constant should be replaced by the assertion that it does not vanish identically, this being justified by the fact that otherwise f would not depend on x_1, x_2.

In the next formula, $c(x_3, \ldots, y_s)$ is now a rational function, and after substitution in (22), (23) we have to use the same reasoning as earlier to remove a possible denominator.

The statement about $R_1(x_1, x_2)$ should be deleted, and the conclusion is that

$$f(x_1, \ldots, x_r) = F(R_1(x_1, \ldots, x_r), x_3, \ldots, x_r),$$

which gives the last formula of the paper.

We take the opportunity of mentioning that a generalization of our Theorem 2 has since been given by Schinzel in Bull. Acad. Polon. Sci. (Série Math.), **11** (1963), 633—638.

Eingegangen 17. Februar 1965

p. 18,

t the

y the
other-

ution
nator.
t

em 2
963),